

Chapitre 20

Étude locale de fonctions

1 Dérivées successives d'une fonction

1.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^p$

Définition 1.1.1.

- Soit f dérivable sur l'intervalle I . Si f' est dérivable sur I , sa dérivée est notée $f^{(2)} = f''$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$, si $f^{(k)}$ est dérivable sur I , sa dérivée est notée $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$ et s'appelle la dérivée $(k+1)^{\text{ième}}$ de f . On dit alors que **f est $k+1$ fois dérivable sur I** .

Exemple 1.1.1. Calculer la dérivée troisième de $f(x) = x^4$.

Définition 1.1.2. On dit qu'une **fonction** est **de classe $\mathcal{C}^p$** sur I si elle est p fois dérivable et si sa dérivée $p^{\text{ième}}$ est continue sur I .

Exemple 1.1.2. Montrer que la fonction $f(x) = e^{x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Méthode 1.1. Pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I , on montre qu'elle est p fois dérivable sur I et que sa dérivée $p^{\text{ième}}$ est continue sur I .

Définition 1.1.3. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I pour tout $p \in \mathbb{N}$. On dit qu'elle est infiniment dérivable.

Exemple 1.1.3. Déterminer si les fonctions suivantes sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition et calculer leurs dérivées successives.

1. $f(x) = \sin(x)$

2. $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

Théorème 1.1.1. L'ensemble $\mathcal{C}^p(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'ensemble I , muni de l'addition des fonctions et du produit par un réel, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
Cela signifie que toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'ensemble I est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur I .

Exemple 1.1.4. Montrer que $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1.2 Formule de Leibniz

Théorème 1.2.1. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur un voisinage de x_0 . La fonction fg l'est également et :

$$\forall n \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad (fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

Exemple 1.2.1. En utilisant la formule de Leibniz, justifier la classe $\mathcal{C}^3$ de $h(x) = \cos(x) \sin(x)$ puis calculer sa dérivée troisième.

Corollaire 1.2.2. Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle I tel que $f(x) \neq 0$, pour tout $x \in I$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est également de classe $\mathcal{C}^p$ sur I .

Exemple 1.2.2. Montrer que la fonction $\frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.3 Composition

Théorème 1.3.1. Si $f : I \rightarrow J$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et $g : J \rightarrow K$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur J , alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I .

Exemple 1.3.1. Montrer que $h(x) = \sin(\sqrt{x})$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Application à la caractérisation des fonctions convexes

2.1 Définition et caractérisation

Définition 2.1.1.

- Une fonction f définie sur l'intervalle I est **convexe** si :

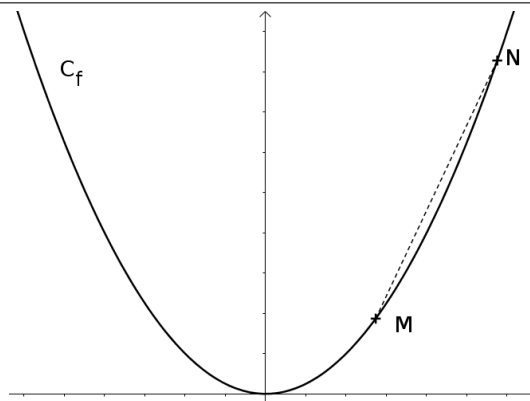
$$\forall t \in [0, 1], \forall (x, y) \in I^2, f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

- Une fonction f est **concave** si $-f$ est convexe.

Exemple 2.1.1. Montrer que la fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.1.1.

La fonction f est convexe si et seulement si pour tout $(M, N) \in C_f^2$, le segment $[M, N]$ est au-dessus de l'arc de C_f .



Théorème 2.1.2. Toute fonction convexe est continue.

Définition 2.1.2. Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 .

On dit que le point $(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de la courbe C_f si f **change de convexité** en ce point (i.e. f était convexe et devient concave, ou f était concave et devient convexe).

2.2 Cas des fonctions dérivables

Théorème 2.2.1. Si une fonction f est **dérivable** sur I , f est **convexe** si et seulement si l'une des deux propositions est vérifiée

- f' est **croissante**,
- C_f est au-dessus de toutes ses tangentes.

Exemple 2.2.1. La fonction $f(x) = e^x$ est-elle convexe ?

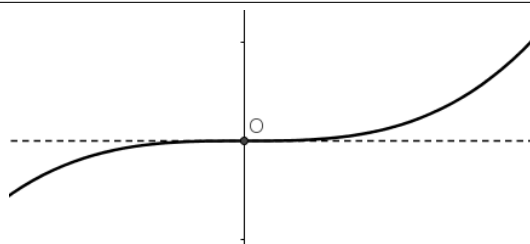
Proposition 2.2.2. Soit une fonction f convexe sur un intervalle ouvert I . Si $f'(x_0) = 0$ alors f admet un minimum global en x_0 .

Exemple 2.2.2. Montrer que $f(x) = x^2$ admet un minimum global en 0.

Proposition 2.2.3.

Soit f une fonction dérivable en x_0 .

C_f présente un **point d'inflexion** en $(x_0, f(x_0))$ si et seulement si la **tangente à la courbe en ce point traverse la courbe**.



Exemple 2.2.3. Montrer que $f(x) = x^3$ admet un point d'inflexion en $(0, 0)$.

2.3 Cas des fonctions deux fois dérivables

Théorème 2.3.1. Si la fonction f est **deux fois dérivable**, f est **convexe** si et seulement si $f'' \geq 0$.

Exemple 2.3.1. La fonction $f(x) = e^{x^2}$ est-elle convexe ?

Proposition 2.3.2. Soit f une fonction dérivable deux fois dérivable en x_0 . $\mathcal{C}_f$ présente un **point d'inflexion** en $(x_0, f(x_0))$ si et seulement si f'' **s'annule en changeant de signe** en x_0 .

Méthode 2.1. Selon la régularité de f , on utilise différentes méthodes pour démontrer sa convexité ou pour déterminer ses points d'inflexion.

Régularité de f	Montrer que f est convexe sur I	Déterminer les points d'inflexion de f
$f \in \mathcal{C}^2(I)$	On montre que $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$.	On cherche les solution de l'équation $f''(x) = 0$, puis on regarde si f'' change de signe en ces points.
$f \in \mathcal{C}^1(I)$	On montre que f' est croissante sur I .	On cherche les points en lesquels la tangente à la courbe traverse la courbe.
$f \in \mathcal{C}^0(I)$	On montre que $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.	On cherche les points en lesquels f change de convexité.

Remarque 2.3.1. La concavité de f sur I correspond à la convexité de $-f$ sur I , donc on obtient les résultats suivants :

Régularité de f	Montrer que f est concave sur I
$f \in \mathcal{C}^2(I)$	On montre que $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$.
$f \in \mathcal{C}^1(I)$	On montre que f' est décroissante sur I .
$f \in \mathcal{C}^0(I)$	On montre que $\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$.

2.4 Inégalité de convexité

Théorème 2.4.1. Soit f une fonction **convexe** sur l'intervalle I , ainsi que $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des réels positifs dont la **somme vaut 1**. Alors on a :

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

Exemple 2.4.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

3 Étude locale d'une fonction

3.1 Comparaison de fonctions au voisinage d'un point

3.1.1 Négligeabilité

Définition 3.1.1. Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. f est **négligeable devant** g au voisinage de x_0 si et seulement si il existe une fonction ε définie sur I telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0 \text{ et } \forall x \in I, f(x) = \varepsilon(x)g(x).$$

On le note

$$f(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(g(x)).$$

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 ,

$$f(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Remarque 3.1.1. $f = o(1) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$

Exemple 3.1.1. Montrer que $f(x) = x^2$ est négligeable devant $g(x) = x$ au voisinage de $x_0 = 0$.

Proposition 3.1.1.

- **Transitivité :** Si $f(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(h(x))$, alors

$$f(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(h(x)).$$

- **Produit :** Si $f(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(g(x))$, alors

$$f(x)h(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(g(x)h(x)).$$

- **Produit :** Si $f(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(g(x))$ et $h(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(k(x))$, alors

$$f(x)h(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(g(x)k(x)).$$

- **Somme :** Si $f(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(h(x))$, alors

$$f(x) + g(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(h(x)).$$

Démonstration.

□

Exemple 3.1.2. Soient $f(x) = x^a$ et $g(x) = x^b$ avec $a < b$.

1. Donner la relation de négligeabilité au voisinage de 0.

2. Donner la relation de négligeabilité au voisinage de $+\infty$.

Proposition 3.1.2 (Croissances comparées).

1. Pour tout $\alpha > 0$, $\ln(x) \underset{(x \rightarrow +\infty)}{=} o(x^\alpha)$

2. Pour tout $\alpha > 0$ et tout $q > 1$, $x^\alpha \underset{(x \rightarrow +\infty)}{=} o(q^x)$

Exemple 3.1.3. Donner la relation de négligeabilité en $+\infty$ entre $f(x) = \ln(x^2)$ et $g(x) = x^2$.

3.1.2 Équivalence

Définition 3.1.2. Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si et seulement si

$$f(x) - g(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(g(x)).$$

On le note

$$f(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{\sim} g(x).$$

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 ,

$$f(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{\sim} g(x) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Remarque 3.1.2.

- $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ si et seulement s'il existe une fonction ε avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ telle que $f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$.
- $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 0$ signifie que f est nulle sur un voisinage de x_0 , donc méfiance.

Exemple 3.1.4. Montrer que les fonctions $f(x) = \frac{1}{x + x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ sont équivalentes en $x_0 = 0$.

Théorème 3.1.3. Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et équivalentes en x_0 . On a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$$

Deux fonctions équivalentes en x_0 ont même limite en x_0 .

Proposition 3.1.4.

- **Produit :** Si f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 , ainsi que h et k , le produit fh est équivalent en x_0 au produit gk .
- **Quotient :** Si f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 , ainsi que h et k , avec h et k ne s'annulant pas, les quotients $\frac{f}{h}$ et $\frac{g}{k}$ sont équivalents en x_0 .
- **Puissance :** Si f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 , alors pour tout α f^α et g^α sont équivalentes en x_0 .
- **Composition par ln :** Si f et g sont strictement positives et équivalentes au voisinage de x_0 , et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ou $+\infty$ alors $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont équivalentes en x_0 .

Exemple 3.1.5. Démontrer que $\frac{x+x^2}{2-x}$ et $\frac{x}{2}$ sont équivalents en $x_0 = 0$.

3.1.3 Équivalents classiques.

Théorème 3.1.5. Si f est une fonction dérivable au voisinage de x_0 , telle que $f'(x_0) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(x_0) \underset{(x \rightarrow x_0)}{\sim} (x - x_0)f'(x_0).$$

Proposition 3.1.6.

1. $\sin(x) \underset{(x \rightarrow 0)}{\sim} x$
2. $(e^x - 1) \underset{(x \rightarrow 0)}{\sim} x$
3. $\ln(1+x) \underset{(x \rightarrow 0)}{\sim} x$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, ((1+x)^\alpha - 1) \underset{(x \rightarrow 0)}{\sim} \alpha x$
5. $(1 - \cos(x)) \underset{(x \rightarrow 0)}{\sim} \frac{1}{2}x^2$

Théorème 3.1.7. Soit u une fonction définie sur I , un voisinage de x_0 , telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$.

On a les résultats suivants :

1. $\sin(u(x)) \underset{(x \rightarrow x_0)}{\sim} u(x)$
2. $(1 - \cos(u(x))) \underset{(x \rightarrow x_0)}{\sim} \frac{1}{2}(u(x))^2$
3. $(e^{u(x)} - 1) \underset{(x \rightarrow x_0)}{\sim} u(x)$
4. $\ln(1 + u(x)) \underset{(x \rightarrow x_0)}{\sim} u(x)$
5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, ((1 + u(x))^\alpha - 1) \underset{(x \rightarrow x_0)}{\sim} \alpha u(x)$

3.2 Formules de Taylor

3.2.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 3.2.1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a, b]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) (b-t)^n dt$$

Exemple 3.2.1. Appliquer cette formule à la fonction $f(x) = e^x$ à l'ordre 3 sur un voisinage de $[0, 1]$.

Application : Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

Proposition 3.2.2. Soit $P(X)$ un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n alors la dérivée $(n+1)^{eme}$ de P est nulle.

Théorème 3.2.3. Soit $P(X)$ un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et $x_0 \in \mathbb{R}$, alors :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (X - x_0)^k$$

Théorème 3.2.4. Si $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ et si $x_0 \in \mathbb{R}$, alors x_0 est une racine d'ordre $k \in \mathbb{N}$ si et seulement si

$$\forall i \in [0, k-1], P^{(i)}(x_0) = 0 \text{ et } P^{(k)}(x_0) \neq 0$$

Exemple 3.2.2. À quelle condition sur λ le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + 5X - \lambda$ admet-il une racine double ?

3.2.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 3.2.5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et f de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $|f^{(n+1)}| \leq M$ sur $[a, b]$. On a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{M |b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

En particulier si $a = 0$, on a

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} b^k \right| \leq \frac{M |b|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemple 3.2.3. Montrer la convergence de la série exponentielle sur $\mathbb{R}$.

3.2.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 3.2.6. Soit f une fonction $\mathcal{C}^n$ en x_0 . On a :

$$f(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o(x-x_0)^n.$$

Exemple 3.2.4. Appliquer cette formule à la fonction $f(x) = e^x$ vue comme $\mathcal{C}^3$ sur un voisinage de 0.

3.3 Développements limités

3.3.1 Définition

Définition 3.3.1. Soit f définie sur I contenant x_0 .

On dit que f admet un **développement limité (DL) d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en x_0** si et seulement si il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in I \setminus x_0, f(x) = P(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

$$\forall x \in I \setminus x_0, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \varepsilon(x)(x - x_0)^n$$

$$\text{où } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Le polynôme $P(x - x_0)$ est la partie régulière du développement limité.

Le reste du développement limité est $f(x) - P(x - x_0) = \varepsilon(x)(x - x_0)^n$.

Remarque 3.3.1. Les termes successifs du DL sont négligeables les uns devant les autres. Plus il y a de termes et plus la précision est grande.

Remarque 3.3.2. On remarque également qu'un DL à l'ordre n donne un DL à l'ordre $p \leq n$ en le tronquant au degré p , c'est à dire en l'amputant de ses termes de degrés strictement supérieurs à p .

Exemple 3.3.1. Sachant que le développement limité de $f(x) = e^x$ en 0 à l'ordre 3 est

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$, donner le DL à l'ordre 2 de f en 0.

3.3.2 Développements usuels

Théorème 3.3.1. Si f admet un DL à l'ordre n en x_0 , il est unique.

Théorème 3.3.2. Toute fonction f qui est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de x_0 admet un DL d'ordre n en x_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par la formule de Taylor-Young,

$$\forall k \in [0, n], a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Exemple 3.3.2. Déterminer les développements limités usuels d'ordre n en 0 des fonctions suivantes :

1. e^x

2. $\ln(1+x)$

3. $\frac{1}{1+x}$

4. $(1+x)^\alpha$

5. $\frac{1}{1-x}$

6. $\sin x$

7. $\cos x$

Exemple 3.3.3. Déterminer le développement limité de $\tan$ en 0 à l'ordre 4.

Proposition 3.3.3. Tableau des DL usuels en 0 :

3.3.3 Opérations

Théorème 3.3.4. Si f et g admettent des DL_n en x_0 , $f + g$ et $f \times g$ également.

Exemple 3.3.4. 1. Calculer le DL à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

2. Calculer le DL à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \cos(x) \times \ln(1+x)$.

Remarque 3.3.3.

- En général, **on ne peut pas dériver un DL**.
Par exemple, $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x} = o(x^2)$, mais $f'(x) \neq o(x)$.
- **Si la fonction est de classe $\mathcal{C}^n$** , alors on peut **dériver un DL** d'ordre inférieur à n .

Exemple 3.3.5. Trouver le DL à l'ordre 2 de $\cos(x)$ à partir du DL à l'ordre 3 de $\sin(x)$.

Remarque 3.3.4. On peut toujours intégrer un DL.

Exemple 3.3.6. Retrouver le DL de $\ln(1+x)$ par celui de $\frac{1}{1+x}$.

3.3.4 Applications

Application 1 : Limites

Les développements limités sont utilisés pour la recherche d'équivalents, donc également pour la recherche de limites.

Définition 3.3.2. La partie principale d'une fonction admettant un DL est le premier terme non nul de ce DL.

Proposition 3.3.5. La fonction f est **équivalente à sa partie principale**, au voisinage de x_0 .

Exemple 3.3.7. Étudier la série de terme général $\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})$.

Application 2 : Allure du graphe

Les développements limités permettent également de connaître localement la position relative d'une courbe par rapport à une tangente en un point.

Méthode 3.1. Si au voisinage de x_0 , on a $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$, alors

- La droite d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ est tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse x_0 .
- Si $a_2 < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est localement située en dessous de sa tangente.
- Si $a_2 > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est localement situé au dessus de sa tangente.

Exemple 3.3.8. Soit $f(x) = \frac{1}{1+x}$ déterminer la tangente en 0 et la position locale de la courbe par rapport à la tangente.

4 Application à la recherche d'extrema locaux

Définition 4.0.1. La fonction f définie sur I admet un **maximum local** (respectivement un **minimum local**) en $x_0 \in I$ si et seulement il existe un intervalle ouvert J centré en x_0 tel que $J \subset I$ et :

$$\forall x \in J, f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

Exemple 4.0.1. La fonction $f(x) = \cos(x)$ admet-elle un maximum local strict en $x_0 = 0$?

Théorème 4.0.1. Si f est dérivable en x_0 et si f admet un **extremum local** en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque 4.0.1. La réciproque est fausse.

Exemple 4.0.2. Donner un contre-exemple à la réciproque.

Définition 4.0.2. Le point $(x_0, f(x_0))$ est un **point critique de f** si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$.

Remarque 4.0.2. Le théorème 4.0.2 revient dire que tout extremum local de f est un point critique de f , mais que tout point critique n'est pas un extremum.

Théorème 4.0.2. Si $(x_0, f(x_0))$ est un **point critique de f** et que f est $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle ouvert contenant x_0 , alors

- si $f^{(2)}(x_0) < 0$ alors f admet un **maximum local** en x_0 ;
- si $f^{(2)}(x_0) > 0$ alors f admet un **minimum local** en x_0 ;
- si $f^{(2)}(x_0) = 0$ alors on ne peut **rien conclure**.

Démonstration.

□

Méthode 4.1. Pour déterminer les extrema locaux de $f \in \mathcal{C}^2(I)$:

1. On détermine les **points critiques** de f en résolvant l'équation $f'(x) = 0$ sur I .
2. Pour chacun de ces points critiques $(x_0, f(x_0))$, on calcule $f^{(2)}(x_0)$:
 - si $f^{(2)}(x_0) < 0$ alors f admet un **maximum local** en x_0 ;
 - si $f^{(2)}(x_0) > 0$ alors f admet un **minimum local** en x_0 ;
 - si $f^{(2)}(x_0) = 0$ alors on ne peut rien conclure et on étudie à la main le signe de $f(x) - f(x_0)$ au voisinage de x_0 (par exemple avec un DL_3 au voisinage de x_0) :
 - si $f(x) - f(x_0) \geq 0$ au voisinage de x_0 , $(x_0, f(x_0))$ est un minimum local
 - si $f(x) - f(x_0) \leq 0$ au voisinage de x_0 , $(x_0, f(x_0))$ est un maximum local
 - si $f(x) - f(x_0)$ change de signe au voisinage de x_0 , $(x_0, f(x_0))$ n'est pas un extremum local

Exemple 4.0.3. Trouver les extrema locaux de $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.