
TD 20 - Étude locale de fonctions

Exercice 1.

La fonction définie par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2.

Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition dans les cas suivants :

1. $f(x) = x\sqrt{x}$

2. $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

Exercice 3.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer a, b, c pour que f soit $\mathcal{C}^2$ (et $\mathcal{C}^3$?).

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par :

$$f(0) = 0, \forall x \neq 0, f(x) = \frac{\cos(5x) - 1}{\sin x}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 6.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\begin{cases} f(x) = a\sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq x_0 \\ f(x) = x^2 + 12 & \text{si } x > x_0 \end{cases}$$

Déterminer a et x_0 pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ mais non $\mathcal{C}^2$, où :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 8.

Calculer les dérivées n -ièmes de :

1. $\sin(x)^2$
2. $(x^2 + 2x - 7)e^x$
3. $x^{n-1} \ln x$
4. $1/(x^2 - 1)$
5. $x^2(1+x)^n$

Exercice 9.

Calculer la dérivée n -ième de $((x-a)(x-b))^n$.

Exercice 10.

Soit f convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 11.

En utilisant la convexité (ou concavité) des fonctions, démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$
2. $\forall x \in [1, e], \ln(x) \geq \frac{x-1}{e-1}$
3. $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$

Exercice 12.

Soit X une variable aléatoire et f une fonction convexe sur un intervalle I telles que :

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \subset I$$

Montrer que :

$$f(E(X)) \leq E(f(X))$$

Exercice 13.

Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre n :

1. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}, n = 4.$
2. $f(x) = e^x + \cos x, n = 3.$
3. $f(x) = \ln(1+x) + \sin x, n = 4.$
4. $f(x) = e^x \ln(1+x), n = 5.$
5. $f(x) = \cos x \sin x, n = 4.$
6. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}, n = 3.$

Exercice 14.

Soit $f(x) = \frac{x}{x-1} \sqrt{x+1}$.

Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

Exercice 15.

Déterminer la limite de f en 0 :

1. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}.$
2. $f(x) = \frac{2}{x(e^x - 1)} - \frac{2}{x^2}.$

Exercice 16.

Étudier la fonction $f(x) = e^{1/x} \sqrt{x(x+2)}$.

Exercice 17.

Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x^4-1)} + \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

Exercice 18.

Soit f définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f .
2. Déterminer la tangente à l'origine, et étudier la position de la courbe par rapport à celle-ci.

Exercice 19.

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{x}}$
2. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$
3. $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$
4. $f(x) = \sqrt{|x-1|} - \ln x$

Exercice 20.

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et le prouver.

1. La fonction $f(x) = x|x|$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$, la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la fonction $f(x) = x^n$ est $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$.
3. La fonction arctan est convexe sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $f(x) = \ln(x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^n}$.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f(x) = x^\alpha$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Une fonction qui n'est pas convexe est concave.
7. Si f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I et toutes les deux convexes, alors $f+g$ est convexe.
8. Soit g une fonction convexe sur I à valeurs dans J . Soit f une fonction croissante et convexe sur J . Alors $f \circ g$ est convexe sur I .
9. Une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ a un minimum.
10. Si f est une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, convexe et impaire, alors f'' est nulle sur $\mathbb{R}$.
11. Pour montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$, on utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
12. Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$ définie sur $[-2, +\infty[$. Son développement limité à l'ordre 1 en 0 est : $f(x) = 2 + \frac{x}{2} + x\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

13. Le développement limité de $\ln(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 est : $\ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
14. $1 + x + x^2 + x^3 \ln(x)$ admet un $\text{DL}_2(0)$.
15. On a $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
16. Le $\text{DL}_3(0)$ de $e^u(1+u)$ est $e^u(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + 2u + \frac{3u^2}{2} + \frac{u^3}{2} + u^3\varepsilon(u)$ avec $\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$.