

Chapitre 21

Intégrales sur un intervalle quelconque

1 Qu'est-ce qu'une intégrale généralisée ?

1.1 Une borne impropre

Définition 1.1.1. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction continue sur $[a, b[$.

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge si

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt = \ell \in \mathbb{R}$$

et on pose $\int_a^b f(t)dt = \ell$.

Sinon on dit que l'intégrale diverge.

Méthode 1.1. Pour déterminer si une intégrale impropre en b , $I = \int_a^b f(t)dt$, est convergente :

1. On pose x tel que $a \leq x < b$,
2. On calcule $\int_a^x f(t)dt$,
3. On détermine si la limite $x \rightarrow b^-$ existe.

Remarque 1.1.1. La définition et la méthode sont également valables si la borne impropre est a .

Exemple 1.1.1. Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes et les calculer.

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

2. $\int_1^{+\infty} ue^{-u^2} du$

Définition 1.1.2. Dans le cas particulier f prolongeable par continuité en b , on dit que l'intégrale est **faussetment impropre en b** .

Exemple 1.1.2. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 x \ln(x) dx$ est faussetment impropre.

1.2 Généralisation à deux bornes impropres

Définition 1.2.1. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f continue sur $]a, b[$.

On dit que $\int_a^b f(t) dt$ **converge** si et seulement si $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ **convergent** pour un $c \in]a, b[$.

Dans ce cas on pose, à l'aide du théorème de Chasles :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Méthode 1.2. Pour déterminer si une intégrale doublement impropre est **convergente**, on sépare l'intégrale en deux morceaux grâce à Chasles et on étudie chaque borne impropre séparément.

Exemple 1.2.1. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ est convergente et la calculer.

2 Propriétés des intégrales généralisées

Remarque 2.0.1. Tous les théorèmes suivants sont énoncés pour des intégrales impropres en b . Ils sont évidemment toujours vrais si l'intégrale est impropre en a , ou même aux deux bornes. Il suffit de modifier l'hypothèse f continue sur $[a, b[$ et $\int_a^b f(t) dt$ converge par :

- f continue sur $]a, b]$ et $\int_a^b f(t) dt$ converge
- f continue sur $]a, b[$ et $\int_a^b f(t) dt$ converge

Théorème 2.0.1.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$ et telles que $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent.

L'intégration est **linéaire**, c'est-à-dire que :

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

et

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt.$$

On a toujours la **relation de Chasles** :

$$\forall c \in [a, b[, \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Théorème 2.0.2. Si f est continue et **positive** sur $[a, b[$ et que $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0.$$

Corollaire 2.0.3. Soit f continue et positive sur $[a, b[$ et que $\int_a^b f(t)dt$ converge. On a :

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \iff f = 0.$$

Proposition 2.0.4. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ et telles que $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent.
On suppose de plus que

$$\forall t \in [a, b[, f(t) \leq g(t).$$

Alors on a la **croissance de l'intégrale** :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

3 Les intégrales de référence

3.1 Intégrales de Riemann

Théorème 3.1.1. L'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

Théorème 3.1.2. Soient a et b des réels.

L'intégrale

$$\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1.$$

En particulier, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1.$$

Exemple 3.1.1. L'intégrale $\int_1^5 \frac{1}{(1-x)^3} dx$ est-elle convergente ?

3.2 Intégrale de la fonction exponentielle

Théorème 3.2.1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Exemple 3.2.1. Déterminer si l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx$ est convergente et la calculer.

4 Le cas particulier des fonctions positives

4.1 Majoration

Proposition 4.1.1. Soit f une fonction positive sur $[a, b[$.
L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée sur $[a, b[$.

Exemple 4.1.1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

4.2 Théorème de comparaison

Théorème 4.2.1 (Théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives).

Soient f et g telles que

$$\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

On a alors :

- Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
- Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Exemple 4.2.1. Montrer que $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Corollaire 4.2.2 (Critère de négligeabilité des intégrales de fonctions positives).

Soient f et g continues et positives sur $[a, b[$ telles que $f(x) \underset{(x \rightarrow b)}{=} o(g(x))$ au voisinage de b , alors :

- Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
- Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Exemple 4.2.2. L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$ est-elle convergente ?

4.3 Critère des équivalents

Théorème 4.3.1 (Critère des équivalents des intégrales de fonctions positives).

Soient f et g des fonctions **positives** sur $[a, b[$ avec

$$f(x) \underset{(x \rightarrow b)}{\sim} g(x),$$

alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ ont le **même comportement**.

Exemple 4.3.1. Déterminer si $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ converge.

Méthode 4.1. Pour déterminer si l'intégrale d'une fonction positive est convergente,
on utilise l'un des critères présentés dans cette partie :

- critère de majoration,
- critère de comparaison,
- critère de négligeabilité,
- critère des équivalents.

5 Comment se ramener au cas des fonctions positives ?

Définition 5.0.1. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si

$$\int_a^b |f(t)|dt$$

est **convergente**.

Théorème 5.0.1. Une intégrale absolument convergente est convergente.

Méthode 5.1. Pour déterminer si l'intégrale d'une fonction non positive est convergente, on essaye de montrer que l'intégrale est absolument convergente.

Exemple 5.0.1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1 + \cos(t) + e^t} dt$ est convergente.

Remarque 5.0.1. Attention, la réciproque est fausse ! Il existe des intégrales convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Exemple 5.0.2. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente mais pas absolument convergente.

6 Comment pratiquer des intégrations par parties ou des changements de variables sur des intégrales généralisées ?

6.1 Intégration par parties

Méthode 6.1. Pour effectuer une intégration par parties dans une intégrale généralisée, on se place sur un intervalle fini, on fait tous les calculs puis on fait tendre les bornes vers $\pm\infty$.

Exemple 6.1.1. Calculer $I_2 = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt$.

6.2 Changement de variables

Théorème 6.2.1. Si f est continue sur $]a, b[$, si φ est une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$, croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, alors les intégrales $\int_a^b f(u)du$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature et en cas de convergence, sont égales.

Remarque 6.2.1. Le résultat est analogue si φ est décroissante :

Si f est continue sur $]a, b[$, si φ est une bijection de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$, croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, alors les intégrales $\int_a^b f(u)du$ et $\int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature et en cas de convergence, sont égales.

Méthode 6.2. Pour effectuer un changement de variables dans une intégrale généralisées $\int_a^b f(u)du$:

1. On pose le changement de variable $u = \varphi(t)$
2. On cherche les bornes α et β telles que φ soit une bijection de $]\alpha, \beta[$ vers $]a, b[$.
3. On change les bornes et remplace u par $\varphi(t)$ et du par $\varphi'(t)dt$.

Méthode 6.3. Pour effectuer un changement de variables dans une intégrale généralisées $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$:

1. On vérifie que φ est une bijection
2. On pose $u = \varphi(t)$.
3. On calcule $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$
4. On calcule $\int_a^b f(u)du$

Exemple 6.2.1. On donne l'intégrale usuelle suivante : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$.

1. Déterminer trois réels a , b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}, x - \frac{1}{2}x^2 = a(x+b)^2 + c$.

2. En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^u e^{-\frac{u^2}{2}} du$ converge et donner sa valeur.

7 Le cas particulier des fonctions paires ou impaires

Proposition 7.0.1.

- Si f est une **fonction paire intégrable** sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^0 f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt,$$

et donc par relation de Chasles

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

- Si f est une **fonction impaire intégrable** sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{-\infty}^0 f(t)dt = - \int_0^{+\infty} f(t)dt,$$

et donc par relation de Chasles

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0.$$

Remarque 7.0.1. Il faut redémontrer ces résultats à chaque fois qu'on les utilise.

Démonstration.

□