

TD 21 - Intégrales sur un intervalle quelconque

Exercice 1.

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt & I_2 = \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{1-t}\right) dt & I_3 = \int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-x}) dx \\
 I_4 = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx & I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx & I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+|\sin x|} dx \\
 I_7 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2(\ln x)^3} dx & I_8 = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x} dx & I_9 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin(1/x^2)}{\ln(1+x)} dx \\
 I_{10} = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx & I_{11} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx & I_{12} = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx
 \end{array}$$

Exercice 2.

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ converge et vaut 1.
2. Nature et calcul de $\int_0^1 t^\alpha \ln(t) dt$ pour $\alpha > 1$.

Exercice 3.

1. A l'aide du changement de variable proposé, étudier les intégrales suivantes (convergence puis calcul) :

$$a) \int_1^{+\infty} \frac{(t-1)^n}{t^{n+2}} dt \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ fixé } (y = \frac{1}{t}) \quad b) \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}} \text{ } (x = t^2) \quad c) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-e^t} dt \text{ } (u = e^t)$$

2. (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+x^4} dx$ est convergente.
(b) A l'aide du changement de variable $y = x^3$, déterminer sa valeur.
3. (a) A l'aide du changement de variable $u = t^2$, calculer $\int_1^x \frac{1}{t} \frac{1}{1+t^2} dt$ pour $x \geq 1$.
(b) En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$. On commencera par faire une intégration par parties.

Exercice 4.

Étudier la nature des intégrales suivantes et les calculer :

$$\begin{array}{lll}
 I_1 = \int_e^{+\infty} \frac{1}{1-x^2} dx & I_2 = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx & I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{2x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \\
 I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx & I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx & I_6 = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx
 \end{array}$$

Exercice 5.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx \quad u_n = \sqrt{n} I_n$$

1. Étudier l'existence de I_n .
2. Trouver une relation liant I_n et I_{n+1} .
3. Montrer que (u_n) est monotone et qu'elle converge.
4. Montrer que :

$$I_n \geq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx$$

5. En déduire que la limite de (u_n) n'est pas nulle.

Exercice 6.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$$

1. Étudier l'existence de I_n .
2. Exprimer I_{2n} en fonction de $I_{2(n-1)}$, puis I_{2n+1} en fonction de I_{2n-1} .
3. (a) Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-nx^2/2} dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-nx^2/2} dx$$

- (b) Montrer que :

$$n^{-\frac{n+2}{2}} I_{n+1} - n^{-\frac{n+1}{2}} I_n = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^n e^{-nx^2/2} (x + \frac{1}{x} - 2) dx$$

- (c) Montrer que

$$0 < \sqrt{n} I_n < I_{n+1}$$

4. Démontrer que :

$$1 - \frac{1}{2n} < \sqrt{4\pi n} 4^{-n} \binom{2n}{n} < 1$$

Exercice 7.

On pose :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt \quad I_n = \int_0^1 t^n \ln t dt$$

1. Démontrer que I et I_n , $n \in \mathbb{N}$ convergent.
2. Calculer I_n .
3. (a) Montrer que pour $t \in [0, 1[$:

$$\frac{1}{t-1} = - \sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{t-1}$$

- (b) Montrer que la fonction $f(t) = \frac{t \ln(t)}{t-1}$ est majorée sur $]0, 1[$.
- (c) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1} dt = 0$$

4. En déduire la valeur de I .

Exercice 8.

Étudier l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Exercice 9.

On considère les intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx \quad J = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

1. Montrer que I et J convergent puis que $I = J$.
2. En déduire la convergence et la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

3. Étudier la convergence et calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx$$

Exercice 10.

Soit

$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$$

1. Montrer que I existe.
2. On pose, pour $0 < x < 1$:

$$I(x) = \int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt \quad J(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

- (a) Montrer que :

$$\int_0^x \frac{t}{\ln t} dt = \int_0^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = t^2$.

- (b) En déduire que $I(x) = J(x)$.

3. Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \ln 2.$$

Pour cela, considérer

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} dt + \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$$

4. Conclure quant à la valeur de I .

Exercice 11.

En admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$, calculer :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

Exercice 12.

Étudier suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, l'existence de :

$$\int_0^2 \frac{1 - e^t + a \sin t}{t^2} dt$$

Exercice 13.

On calcule ici $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

1. (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, t^n e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
 (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n$ converge.
2. Déterminer la valeur de I_{2n+1} .
3. (a) On pose $J_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+2} = \frac{n+1}{2} J_n.$$

- (b) On admet que $I_0 = \sqrt{\pi}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}.$$

Exercice 14.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

1. Étudier la parité de f .
2. (a) Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
 (b) Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.
 (c) En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.
3. (a) Démontrer, à l'aide d'une IPP, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^x}{(1 + e^x)^2} dx = \ln(2).$$

- (b) En déduire la convergence et la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^x}{(1 + e^x)^2} dx.$$

Exercice 15.

On définit la fonction f par $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations, f se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?
3. Montrer que pour tout $t \geq 1, 0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $f(x)$ est équivalent à $\frac{e^{-x}}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 16.

On pose pour x réel strictement positif $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier le sens de variation de f .
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.