

Chapitre 22

Convergences

1 Les inégalités

1.1 Inégalité de Markov

Théorème 1.1.1 (Inégalité de Markov).

Soit $X \geq 0$ une var admettant une espérance. On a, pour $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a}E(X).$$

Exemple 1.1.1. Soit X une va suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Montrer que $P(X \geq \lambda^2) \leq \frac{1}{\lambda}$.

1.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebichev

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Bienaymé-Tchebichev).

Soit X une var admettant des moments d'ordre 1 et 2.

On a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\text{Var}(X).$$

Exemple 1.2.1. Soit X une va suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Montrer que $P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.

2 Convergence en probabilité

2.1 Définition

Définition 2.1.1. On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable X si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Notation 2.1.2. Ceci se note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} X.$$

Méthode 2.1. Pour montrer qu'une suite de va $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une va certaine X , on raisonne en deux étapes :

1. On fixe $\varepsilon > 0$, puis on utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev pour majorer $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$.
2. On montre que le majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exemple 2.1.1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de va indépendantes suivant toutes une même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

Montrer que la suite (S_n) converge en probabilité vers la va certaine égale à λ .

Proposition 2.1.1. • Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} X$ et si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue alors

$$f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} f(X).$$

• Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} X$ et $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} X + Y$.

2.2 Loi faible des grands nombres

Théorème 2.2.1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi qui admettent une espérance m et une variance, et soit $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, alors pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\overline{X}_n - m| \geq \epsilon) = 0$$

Théorème 2.2.2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{X}_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Par la loi faible des grands nombres, on a

$$\frac{1}{n} \mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} p,$$

c'est-à-dire la va de loi certaine égale à p .

Démonstration.

□

Remarque 2.2.1. Ce théorème nous montre que si on répète une infinité de fois une épreuve de Bernoulli, la fréquence de succès tend vers p . Cela permet de prouver le lien intuitif entre probabilités et fréquences.

3 Convergence en loi

3.1 Définition

Définition 3.1.1. On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers la variable X si et seulement si :

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ tel que } F_X \text{ continue en } a, \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(a) = F_X(a).$$

Notation 3.1.2. Ceci se note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X.$$

Proposition 3.1.1 (Le cas particulier des va discrètes).

Pour des va discrètes, $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ avec $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ si et seulement si :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x_i) = F_X(x_i).$$

Exemple 3.1.1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de va telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1, \frac{1}{n}\right)$.

Montrer que (X_n) converge en loi vers la va certaine égale à 0.

Proposition 3.1.2. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ et si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue alors

$$f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} f(X).$$

Théorème 3.1.3 (Convergence en probabilité $\Rightarrow$ Convergence en loi).

Si la suite (X_n) converge vers X en probabilité, alors elle converge en loi vers X .

Proposition 3.1.4. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ alors, pour tout entier k naturel :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$$

où X suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Autrement dit :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X.$$

Où X suit une loi de Poisson de paramètre λ .