
TD 22 - Convergences.

Exercice 1.

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$

1. Montrer que : $P(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$
2. (a) Montrer que $P(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}$
(b) En déduire que $P(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$

Exercice 2.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et telles que X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \geq pn\sqrt{n})$.

Exercice 3.

On définit la suite de variables (X_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n(\Omega) = \left\{ \frac{1}{n}, n \right\}$$

et leur loi par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}, P(X_n = n) = \frac{1}{n+1}$$

1. Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers la variable nulle.
2. La suite converge-t-elle en probabilité ?
3. Calculer $E(X_n)$.

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une va de loi $\mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que $P(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$.
2. (a) Montrer que $P(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.
(b) En déduire que $P(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 5.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une va suivant une loi $\mathcal{B}(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

1. Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'espérance de la va $Y_t = e^{tX}$.
2. Montrer que $\forall t > 0, P(X \geq a) \leq e^{-ta} (1 - p + p e^t)^n$.

Exercice 6.

Dans une boîte A , il y a deux jetons numérotés 0, et dans une boîte B , deux jetons numérotés 1. On choisit un jeton de A au hasard, un jeton de B , et on les échange, etc. . .

Soit X_n la somme des numéros dans A après n opérations.

1. Déterminer la loi de X_n
2. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n) .

Exercice 7.

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

1. Donner la loi de S_n et en déduire l'espérance et la variance de $\overline{X}_n$.
2. (a) Montrer que, pour tout réel ε strictement positif, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.
 (b) Montrer plus précisément que, pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver une constante K_ε telle que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on ait l'inégalité :

$$P\left(\left|\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{K_\varepsilon}{n}.$$

- (c) En déduire que, pour tout réel r vérifiant $0 < r < \frac{1}{2}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) = 0.$$

Exercice 8.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\lambda^2 \varepsilon^2}. \text{ En déduire : } P\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}.$$

Exercice 9.

1. Soit X une variable aléatoire à densité. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $X_n = X e^{1/n}$. Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers X .
2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout entier naturel n non nul, X_n suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{n}$. Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

Exercice 10.

Monsieur X vend des journaux sur le marché le samedi matin. Il propose au choix deux quotidiens A et B et il dispose d'un stock de 40 exemplaires de A et 40 exemplaires de B . Chaque client demande soit A , soit B avec une probabilité de 0,5. Les demandes de clients sont indépendantes les unes des autres. Un samedi, 60 clients se présentent. On note x la probabilité de l'évènement "monsieur X ne satisfait pas à toutes les demandes, cette matinée".

1. Déterminer la loi de Y , le nombre de clients demandant A dans la matinée.
2. Exprimer x à l'aide de Y .
3. Déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un majorant de x .

Exercice 11.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{n}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n = \lfloor X_n \rfloor$ et $Z_n = X_n - Y_n$.

1. (a) Que vaut $Y_n(\Omega)$?
(b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n .
2. (a) Que vaut $Z_n(\Omega)$?
(b) A l'aide de la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'évènements $\{Y_n = k\}_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que, pour tout $t \in [0, 1[$, $P(Z_n \leq t) = \frac{1 - e^{-t/n}}{1 - e^{-1/n}}$
3. En déduire que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z qui suit une loi uniforme de $[0, 1]$.