
Bilan Semestre 2

Table des matières

1	Etude de fonctions	2
1.1	Dérivées n -ieme	2
1.2	Convexité	2
1.3	Etude locale de fonction	2
1.3.1	Equivalent et négligeabilité	2
1.3.2	Développements limités	3
1.3.3	Utilisation des DL	4
1.4	Intégrales généralisées	4
1.4.1	Intégrales de références	4
1.4.2	Justifier qu'une intégrale converge	5
1.4.3	IPP et changement de variable	5
1.4.4	Suites d'intégrales	6
2	Suites et Séries	7
2.1	Etude asymptotique des suites	7
2.2	Séries	8
2.2.1	Séries usuelles	8
2.2.2	Justifier qu'une série converge	9
2.2.3	Autres méthodes d'étude des séries	9
3	Probabilités	9
3.1	Variables aléatoires discrètes	9
3.1.1	Définitions des objets étudiés avec les variables aléatoires	9
3.1.2	Théorème de transfert	10
3.1.3	Variables aléatoires usuelles	11
3.1.4	Comment étudier une variable aléatoire non usuelle ?	13
3.2	Couple de variables aléatoires	14
3.2.1	Loi du couple, loi conditionnelle, loi marginale	14
3.2.2	Loi du max, loi du min, loi de la somme	15
4	Algèbre linéaire	17
4.1	Espaces vectoriels	17
4.1.1	Espaces vectoriels de référence, leurs bases canoniques et leur dimension	17
4.1.2	Sous-espaces vectoriels	17
4.1.3	Familles de vecteurs	18
4.1.4	Intersection de sev, Somme de sev	19
4.2	Applications linéaires	19
4.2.1	Définition, Noyau, Image	19
4.2.2	Projection, Formes linéaires	20
4.2.3	Application linéaire et matrice	21

1 Etude de fonctions

1.1 Dérivées n -ième

Méthode 1.1. Pour déterminer la dérivée n -ième d'une fonction on peut :

- Regarder les premières dérivées et essayer de trouver une formule généraliste
- Décomposer notre fonction en produit de deux fonctions où il est plus facile de déterminer les dérivées successives puis utiliser la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

- Voir TD20 Ex 8

Définition 1.1.1. Une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ est une fonction p -fois dérivable et dont la dérivée p -ième est continue. Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est une fonction que l'on peut dériver une infinité de fois.

Méthode 1.2. Les fonctions usuelles sont toutes $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité (attention à $\sqrt{\cdot}$ et $|\cdot|$). Ainsi pour justifier qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ on peut la décomposer en somme/produit/composée de fonction $\mathcal{C}^\infty$ en faisant attention aux domaines de définition.

Méthode 1.3. Si la fonction ne se décompose pas en produit/somme/composée de fonctions usuelles (par exemple changement de formule en 1 point). On justifie le fait d'être de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$, ou plus sur le plus grand intervalle possible (tout sauf le(s) point(s) problématique(s)) et on étudie le(s) point(s) problématique(s) à part à l'aide des limites de taux d'accroissement ou des limites de la dérivées.

- Voir TD20 Ex 4, 6, 7.

1.2 Convexité

Méthode 1.4. Pour montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est convexe (resp. concave) sur un intervalle I on calcule sa dérivée seconde et on justifie qu'elle est positive (resp. négative).

Méthode 1.5. Pour montrer une inégalité sur un intervalle $[a, b]$ à l'aide de la convexité, on peut :

- Déterminer la fonction à étudier (fonction qui n'est pas de la forme $x \mapsto ax + b$)
- Déterminer si cette fonction est convexe ou concave
- Si elle est convexe on a $f(x) \geq T_{x_0}(x)$ (où $T_{x_0}(x)$ est l'équation de la tangente en x_0) et
$$f(x) = f\left(a \times \frac{x-b}{a-b} + b \times \left(1 - \frac{x-b}{a-b}\right)\right) \leq \frac{x-b}{a-b} f(x) + \left(1 - \frac{x-b}{a-b}\right) f(b).$$
- Si elle est concave les inégalités sont dans l'autre sens.

- Voir TD20 Ex 12

1.3 Etude locale de fonction

1.3.1 Equivalent et négligeabilité

Méthode 1.6.

- $f(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) \underset{(x \rightarrow x_0)}{=} g(x) + o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Proposition 1.3.1.

- Pour tout $\alpha > 0$, $\ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$ (croissances comparées)
 - Pour tout $\alpha > 0$ et $q > 1$, $x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(q^x)$ (croissances comparées)
 - Equivalents usuels **en $x = 0$** :
 - $\triangleright \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
 - $\triangleright \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
 - $\triangleright 1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
 - $\triangleright \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
 - $\triangleright e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
 - $\triangleright (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$
 - $\triangleright \sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x$
- On peut remplacer x par $u(x)$ (et 0 par x_0) si $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$

1.3.2 Développements limitésDéveloppements limités usuels en **$x = 0$** **Proposition 1.3.2.**

- $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$
- $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1) \frac{x^2}{2!} + \dots + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sqrt{1+x}$ cf précédent avec $\alpha = 1/2$
- $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$

Méthode 1.7.

Pour déterminer un DL on peut :

- Si c'est en 0 : additionner, soustraire, multiplier les DL usuels
- Si c'est en dehors de 0 ou bien si il ne s'agit pas d'une addition/soustraction/multiplication de DL usuels, utiliser la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned}
 f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \\
 = & \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)
 \end{aligned}$$

1.3.3 Utilisation des DL

Méthode 1.8 (Détermination d'équivalent.).

- Pour déterminer un équivalent d'une fonction en x_0 on peut calculer son DL en x_0 . Le premier terme non nul est un équivalent de la fonction au voisinage de x_0 . Cela peut permettre ensuite en utilisant les propriétés sur les équivalents : produits, divisions, puissances. De trouver un équivalent de la fonction.
- Si on a $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} Cx^k$ en 0 et que l'on a une suite $u_n = f(1/n)$ alors $u_n \sim C \left(\frac{1}{n}\right)^k$

- Voir TD20 Ex 16

Méthode 1.9 (Allure locale du graphe).

Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$, alors :

1. Si $a_1 = 0$ alors
 - Si $a_2 < 0$ il y a un maximum local en x_0
 - Si $a_2 > 0$ il y a un minimum local en x_0
 - Si $a_2 = 0$ pour conclure il faut pousser le DL jusqu'au premier terme non nul (si le degré est impair, il n'y a ni maximum ni minimum local en x_0 , si le degré est pair il y a les mêmes conclusions qu'avec a_2)
2. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ et
 - Si $a_2 < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est localement située en dessous de sa tangente.
 - Si $a_2 > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est localement située au dessus de sa tangente.
 - Si $a_2 = 0$ pour conclure il faut pousser le DL jusqu'au premier terme non nul (si le degré est impair, la courbe traverse la tangente, si le degré est pair il y a les mêmes conclusions qu'avec a_2)

- Voir TD20 Ex 19, ex 20

1.4 Intégrales généralisées

1.4.1 Intégrales de références

Théorème 1.4.1. L'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{converge} \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha > 1.$$

Théorème 1.4.2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

1.4.2 Justifier qu'une intégrale converge

Méthode 1.10. Pour déterminer si une intégrale impropre en b , $I = \int_a^b f(t)dt$, on peut :

1. Si l'on connaît une primitive de la fonction intégrée :
 - Poser x tel que $a \leq x < b$,
 - Calculer $\int_a^x f(t)dt$,
 - Déterminer si la limite $x \rightarrow b^-$ existe.
2. Si la fonction est **positive** :
 - Déterminer un équivalent de f au voisinage de b pour se ramener à l'étude d'une intégrale de référence (Riemann, expo). Si

$$f(x) \underset{(x \rightarrow b)}{\sim} g(x),$$

alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ ont le **même comportement**.

- Déterminer une relation de négligeabilité ou de comparaison avec une intégrale de Riemann ou exponentielle. Si

$$\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t) \text{ ou } f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} o(g(t))$$

On a alors :

- Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
- Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

- Méthode 1 : Voir Chapitre 21 Exemple 1.1.1
- Méthode 2 : Voir TD21 Ex 1

Méthode 1.11. Pour déterminer si une intégrale doublement impropre est **convergente**, on sépare l'intégrale en deux morceaux grâce à Chasles et on étudie chaque borne impropre séparément.

Méthode 1.12. Pour déterminer si l'intégrale d'une fonction **non positive** est **convergente**, on essaye de montrer que l'intégrale est absolument convergente. C'est-à-dire que $\int_a^b |f(t)|dt$ converge

1.4.3 IPP et changement de variable

Méthode 1.13. Pour effectuer une intégration par parties dans une intégrale **généralisée**, on se place sur un intervalle fini, on fait tous les calculs puis on fait tendre les bornes vers les bornes impropres.

- Voir TD21 Ex 4 (2, 5), Ex2

Méthode 1.14. Pour effectuer un changement de variables dans une intégrale **généralisées** $\int_a^b f(u)du$:

1. On pose le changement de variable $u = \varphi(t)$
2. On cherche les bornes α et β telles que φ soit une bijection de $] \alpha, \beta[$ vers $] a, b[$.
3. On change les bornes et remplace u par $\varphi(t)$ et du par $\varphi'(t)dt$.

Méthode 1.15. Pour effectuer un changement de variables dans une intégrale généralisées $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$:

1. On vérifie que φ est une bijection
2. On pose $u = \varphi(t)$.
3. On calcule $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$
4. On calcule $\int_a^b f(u)du$

Méthode 1.16. Pour effectuer un changement de variables dans une intégrale généralisées $\int_a^b f(u)du$:

1. On pose le changement de variable $u = \varphi(t)$
2. On cherche les bornes α et β telles que φ soit une bijection de $] \alpha, \beta[$ vers $] a, b[$.
3. On change les bornes et remplace u par $\varphi(t)$ et du par $\varphi'(t)dt$.

Remarque 1.4.1. • Il n'est pas nécessaire de passer par des bornes "propres" pour faire le changement de variable

- Si le changement de variable est inversible (ex $u = e^t \Leftrightarrow t = \ln(u)$) on peut "jongler" entre les deux méthodes.

- Voir TD21 Ex 3

1.4.4 Suites d'intégrales

Méthode 1.17. Lorsque l'on étudie une suite définie par des intégrales impropres : $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $I_n = \int_a^b f_n(t)dt$ avec une borne impropre

1. Lorsque l'on veut justifier que la suite est bien définie : on justifie que I_n est bien définie pour tout n , c'est-à-dire que toutes les intégrales sont convergentes (critère d'équivalence, négligeabilité, comparaison)
2. Lorsque l'on veut minorer/majorer I_n , on cherche à minorer/majorer f_n sur l'intervalle $[a, b]$
3. Lorsque l'on veut regarder si (I_n) est croissante ou décroissante on part de $I_{n+1} - I_n = \int_a^b f_{n+1}(t) - f_n(t)dt$ et l'on regarde le signe de la fonction intérieure sur $[a, b]$
4. Lorsque l'on regarde si la suite (I_n) converge on utilise le théorème de convergence monotone avec les deux points précédents. **Attention** ne pas confondre convergence de l'intégrale I_n à n fixé (point 1) et convergence de la suite de nombre (I_n) .
5. Lorsque l'on veut une relation entre I_n et I_{n+1} on part généralement de I_{n+1} et on applique une IPP pour essayer de retomber sur I_n
6. Une fois tout cela fait on "sort" de l'étude d'intégrale et on arrive sur une étude de suite reposant sur une relation de récurrence.

- Voir TD21 Ex 5,6,7,13

2 Suites et Séries

2.1 Etude asymptotique des suites

Proposition 2.1.1. Supposons que (v_n) soit non nulle à partir d'un certain rang. On a

$$1. u_n = o(v_n) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

$$2. u_n \sim v_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Théorème 2.1.2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors :

$$1. \sin u_n \sim u_n$$

$$2. e^{u_n} - 1 \sim u_n$$

$$3. \tan u_n \sim u_n$$

$$4. \ln(1 + u_n) \sim u_n$$

$$5. (1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$$

$$6. 1 - \cos u_n \sim u_n^2/2$$

- Calcul d'équivalent : voir TD14, ex2, 3

Remarque 2.1.1.

- Les équivalents peuvent se multiplier, se diviser, passer à la puissance.
- Les équivalents **ne peuvent pas s'ajouter, se soustraire, être composé par une fonction**

Méthode 2.1. Si l'on veut utiliser plusieurs équivalents à la suite on travaille "de l'extérieur vers l'intérieur".

$$\ln \left(1 + \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right) \underset{\text{car } \sin(1/n) \rightarrow 0}{\sim} \sin \left(\frac{1}{n} \right) \underset{\text{car } 1/n \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{n}$$

Proposition 2.1.3. Soit (u_n) une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. On a :

$$1. \text{ pour tout } \alpha > 0, \ln(u_n) = o(u_n^\alpha)$$

$$2. \text{ pour tous } \alpha < \beta, u_n^\alpha = o(u_n^\beta)$$

$$3. \text{ pour tout } \alpha > 0 \text{ et tout } q > 1, u_n^\alpha = o(q^{u_n})$$

$$4. \text{ En particulier, pour tout } \alpha > 0, u_n^\alpha = o(e^{u_n}).$$

Proposition 2.1.4. Si $u_n \sim v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

2.2 Séries

2.2.1 Séries usuelles

Théorème 2.2.1. Séries géométriques

1. **Série géométrique** : La série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

2. **Série géométrique dérivée première** : La série de terme général nq^{n-1} converge si et seulement si $|q| < 1$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

3. **Série géométrique dérivée seconde** : La série de terme général $n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Théorème 2.2.2. Série exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Théorème 2.2.3. Série de Riemann

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème 2.2.4. Série télescopique

Soit (u_n) une suite. La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge si et seulement si (u_n) converge.

2.2.2 Justifier qu'une série converge

Méthode 2.2. Pour déterminer si une série converge, on peut :

1. Si l'on reconnaît une combinaison linéaire de séries usuelles (géométriques, exponentielles) :
 - Si l'on travaille avec des séries expo : passer par les sommes partielles
 - Décomposer pour faire apparaître nos termes généraux de séries usuelles
 - Utiliser nos formules usuelles (il faut faire attention à l'indice de départ de nos séries)
2. Si l'on reconnaît une série "télescopique" : On passe par la somme partielle, puis on fait tendre n vers l'infini
3. Si le terme général de la série est **positif** :
 - Déterminer un équivalent de u_n pour se ramener à l'étude d'une série de référence (Riemann, expo, géométrique). Si deux **suites positives** (u_n) et (v_n) sont **équivalentes**, les **séries** de termes généraux u_n et v_n **ont le même comportement**.
 - Déterminer une relation de négligeabilité ou de comparaison pour se ramener à l'étude d'une série de référence. Si

$$0 \leq u_n \leq v_n \text{ ou } u_n = o(v_n)$$

On a alors :

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

- Méthode 1 : Voir TD15 Ex1, 3
- Méthode 2 : Voir TD15 Ex10
- Méthode 3 : Voir TD15 Ex 2,4,5

2.2.3 Autres méthodes d'étude des séries

- Comparaison séries, intégrales Voir DS 5 Sujet 1 Pb1
- Etude de séries via les suites Voir TD15 ex 18, TD14 ex 7,8

3 Probabilités

3.1 Variables aléatoires discrètes

3.1.1 Définitions des objets étudiés avec les variables aléatoires

Définition 3.1.1. Loi d'une variable aléatoire

La loi d'une variable aléatoire c'est la donnée de :

- L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs pouvant être prises par X .
- Les probabilités $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$

Définition 3.1.2. Espérance d'une variable aléatoire

On dit que X admet une espérance ssi $\sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$ converge **absolument**. Dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$$

Remarque 3.1.1. • Si X est une variable aléatoire finie ($X(\Omega)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs). Alors la $\sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$ n'est plus une série mais une somme finie donc "converge" forcément on peut passer directement au calcul.

- Sinon il faut commencer par justifier la convergence absolue (cf 2.2.2) avant de calculer l'espérance
- L'espérance correspond à la valeur moyenne prise par X

Définition 3.1.3. Moment d'ordre r d'une variable aléatoire

On dit que X admet un moment d'ordre r ssi $E(X^r)$ existe ssi $\sum_{k \in X(\Omega)} k^r P(X = k)$ converge absolument. Dans ce cas :

$$E(X^r) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^r P(X = k)$$

Remarque 3.1.2. En particulier X admet un moment d'ordre 2 ssi $\sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X = k)$ converge absolument (ssi converge car les termes de la somme sont tous positifs)

Définition 3.1.4. Variance d'une variable aléatoire

On dit que X admet une variance ssi $(X - E(X))^2$ admet une espérance. Alors

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2)$$

Théorème 3.1.1. Formule de Koenig-Huygens

X admet une variance ssi X admet des moments d'ordre 1 et 2 et dans ce cas :

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Remarque 3.1.3. On utilise généralement la formule de Koenig-Huygens pour calculer la variance d'une variable aléatoire.

Définition 3.1.5. Fonction de répartition d'une variable aléatoire

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction :

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto P(X \leq x) \end{cases}$$

3.1.2 Théorème de transfert

Théorème 3.1.2. Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire réelle discrète avec $X(\Omega) \in \mathbb{N}$ et $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors $Y = g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série suivante est absolument convergente :

$$E(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k) P(X = k)$$

Remarque 3.1.4.

Si X est une variable finie alors il n'est pas nécessaire de vérifier la convergence absolue de la somme (qui est dans ce cas une somme finie et non une série)

Exemple 3.1.1.

- TD13 Ex 14, Ex 5 pour les variables finies
- TD16 Ex13 pour les variables discrète infinies.

Corollaire 3.1.3. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $E(aX + b) = a E(X) + b$.

Proposition 3.1.4. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$.

3.1.3 Variables aléatoires usuelles

- **Loi certaine**

Définition 3.1.6. On dit que X suit une loi certaine si X ne peut prendre qu'une seule valeur.

Ainsi, X suit une **loi certaine** sur $\{x_1\}$ si et seulement si :

$$P(X = x_1) = 1$$

- **Loi uniforme**

Définition 3.1.7. Une expérience aléatoire qui admet un nombre fini d'issues équiprobables est décrite par une loi uniforme.

On dit que X suit une **loi uniforme** sur $\{x_1, \dots, x_n\}$ si et seulement si :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = x_i) = \frac{1}{n}.$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1, \dots, x_n\})$.

Théorème 3.1.5. Si X suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{Var}(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

- Voir TD13 Ex 16(1)

- **Loi de Bernoulli**

Définition 3.1.8. Une expérience aléatoire qui admet deux issues possibles (gagné ou perdu, pile ou face, etc) peut être décrite par une var suivant une loi de Bernoulli.

On dit que X suit une **loi de Bernoulli**, ou que X est une variable de Bernoulli de **paramètre** $p \in [0, 1]$ si et seulement si

1. $X(\Omega) = \{0, 1\}$
2. $P(X = 1) = p$

Théorème 3.1.6. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , on a :

$$E(X) = p \quad \text{Var}(X) = p(1-p)$$

- **Loi binomiale**

Définition 3.1.9. On considère une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p . On répète n fois de manière indépendante cette expérience, et X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. On dit alors que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

On dit que la variable égale au nombre de parties gagnées suit une **loi binomiale de paramètres** n et p , où p est la probabilité de gagner une partie.

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Théorème 3.1.7. Si une variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p , on a :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Théorème 3.1.8. Une var X suit une loi binomiale de paramètres n et p si et seulement si X est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p . On en déduit :

$$E(X) = np \quad \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

- Voir TD13 Ex5, 15, 16(2)
- **Loi géométrique**

Définition 3.1.10. On répète une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p de manière indépendante et on appelle X le nombre d'étapes nécessaires à l'obtention du premier succès.

On a alors, si p est la probabilité de succès et $q = 1 - p$:

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = q^{k-1}p$.

On dit que X suit une **loi géométrique de paramètre p** et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et on note :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

Théorème 3.1.9. Soit X une variable suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$. Cette variable possède une espérance et une variance :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

- Voir TD16 Ex 2, 4, 5, 6, 16
- **Loi de Poisson**

Définition 3.1.11. On dit que X suit une **loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$** si et seulement si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Théorème 3.1.10. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors :

$$E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

- Voir TD16 Ex 11, 13

Remarque 3.1.5.

Il faut savoir reconnaître les lois usuelles "dans les deux sens" :

- Si l'on a une expérience qui correspond à une loi de Bernoulli, Binomiale ou Géométrique l'identifier et donner rapidement la loi, l'espérance, la variance.
- Inversement si on nous a donné/fait calculer par d'autres moyen la loi de X et que cela correspond à une loi usuelle savoir l'identifier rapidement pour calculer facilement l'espérance, la variance.

Attention toutefois à l'excès de zèle et aux variables qui "ressemblent" à des géométriques ou binomiales. Pour éviter les pièges un premier réflexe peut être de regarder que le $X(\Omega)$ correspond bien (même si ce n'est pas toujours suffisant).

3.1.4 Comment étudier une variable aléatoire non usuelle ?

Méthode 3.1.

Possibilité n°1 : Notre variable est définie à partir de tirages successifs (Ex on lance une infinité de fois une pièce et on regarde le nombre de Face avant le 1er Pile, on fait des tirages successifs sans remise dans une urne jusqu'à obtention de la boule noire, on fait des tirages successifs en ajoutant des boules noires jusqu'à obtention d'une boule noire,...)

Pour déterminer la loi de X :

1. On commence par regarder les valeurs pouvant être prises par $X : X(\Omega)$. **Attention** pour les variables n'ayant "pas de limites" (variables discrètes infinies) à ne pas introduire une valeur max.
2. Déterminer les $P(X = k)$. Pour cela on essaie de se ramener à des probabilités que l'on connaît et donc à nos tirages successifs : on énumère le/les tirages qui nous ont permis d'obtenir $X = k$. (ex pour les tirages successifs jusqu'à avoir une boule noire : $X = k \Leftrightarrow B_1 B_2 \dots B_{k-1} N_k$, alors $P(X = k) = P(B_1 B_2 \dots B_{k-1} N_k)$)
3. • Si les tirages successifs sont indépendants (exemple lancer d'une pièce et on regarde le nombre de Face avant le 1er Pile) alors on utilise l'indépendance

$$\text{ex : } P(X = k) = P(P_1 \dots P_{k-1} N_k) = P(P_1)P(P_2) \dots P(P_{k-1})P(N_k) = p^{k-1}q$$

- Si les tirages sont dépendants les uns des autres alors on utilise la Formule des probabilités composées

$$\text{ex : } P(X = k) = P(B_1 \dots B_{k-1} N_k) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) \dots P_{B_1 \dots B_{k-2}}(B_{k-1})P_{B_1 \dots B_{k-1}}(N_k)$$

Sachant que l'on peut déterminer les probabilités conditionnelles : si on a tiré que des boules blanches pendant i tirages on sait combien de boules on a ajouter ou retirer et on sait ce qu'il y a dans l'urne après ces i tirages.

- Voir TD 13 Ex13, Ex16 (1), TD16 Ex3, Ex10, Ex15

Méthode 3.2.

Possibilité n°2 : $X(\Omega)$ ne contient que peu de valeurs. Alors on détermine les $P(X = k)$ en utilisant la formule $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$, en utilisant le dénombrement.

- Voir TD13 Ex8, Ex13, Ex15(2)

Méthode 3.3.

Possibilité n°3 : On nous a donné la loi de X mais il nous manque la valeur d'un paramètre. Alors on commence par déterminer la valeur de ce paramètre en utilisant :

$$\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$$

- Voir TD16 Ex 1,8,9

Une fois que la loi a été déterminée on étudie, l'espérance, la variance à l'aide des séries.

3.2 Couple de variables aléatoires

3.2.1 Loi du couple, loi conditionnelle, loi marginale

Définition 3.2.1. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Déterminer la loi du couple (X, Y) ou loi conjointe de X et Y , c'est donner :

- $X(\Omega)$
- $Y(\Omega)$
- $P([X = x] \cap [Y = y])$, pour tout couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Méthode 3.4.

Pour déterminer la loi du couple (X, Y) directement sans passer par la loi conditionnelle (cf partie suivante). On commence par déterminer les valeurs possibles prises par X et Y ($X(\Omega)$, $Y(\Omega)$). Puis pour $k \in X(\Omega)$ et $i \in Y(\Omega)$ on regarde à quel(s) tirage(s) particulier(s) $X = k \cap Y = i$ correspond et on cherche la probabilité de ce(s) tirage(s).

- Voir TD17 Ex12 (q1)

Définition 3.2.2. La loi de X conditionnellement à l'évènement $(Y = i)$ est définie par la donnée, pour tout k de $X(\Omega)$ de : $P_{(Y=i)}(X = k)$

Méthode 3.5. Pour déterminer la loi de X conditionnelle à l'évènement $(Y = i)$. On se place dans le cas où $Y = i$ et on regarde, dans ce cas précis, pour $k \in X(\Omega)$ quel est la probabilité de tomber sur $X = k$. **Attention** à ne pas oublier les cas où il y a une probabilité nulle.

Remarque 3.2.1.

- Souvent (pas forcément toujours) la probabilité conditionnelle si elle est demandée correspond à une loi usuelle.
- **Attention** à ne pas oublier les cas de probabilité nulle.
- Voir TD17 Ex13 (2), Ex19 (2a)

Méthode 3.6. Si on connaît la loi de Y et la loi de X conditionnellement à $Y = i$ pour tout $i \in Y(\Omega)$ alors on peut trouver la loi du couple (X, Y) , grâce à la formule des probabilités composées :

$$P(X_k \cap Y = i) = P(Y_i)P_{Y=i}(X = k)$$

- Voir TD17 Ex1 (q1), Ex19 (2b)

Méthode 3.7. Pour déterminer la loi d'une va Y si l'on connaît la loi du couple (X, Y) ou si l'on connaît la loi conditionnellement à une va X et la loi de X , on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support $Y(\Omega)$ à partir de celui de X et de la loi de Y conditionnellement à X .
2. On considère le système complet d'événements associé à X : $\{X = n, n \in X(\Omega)\}$.
3. Pour $k \in Y(\Omega)$, on détermine $P(Y = k)$ en appliquant la formule des probabilités totales :

$$P(Y = k) = \sum_{n \in X(\Omega)} P(Y = k \cap X = n).$$

4. On réduit alors la somme en trouvant les conditions sur n pour que les événements $Y = k$ et $X = n$ ne soient pas incompatibles.
5. On applique la formule des probabilités composées :

$$P(Y = k) = \sum_{n \in X(\Omega)} P(X = n)P_{(X=n)}(Y = k).$$

6. On remplace les probabilités par leurs valeurs (en faisant attention aux termes possiblement nuls) et on calcule la somme.

- Voir TD17 Ex 1(2), Ex 13 (2), Ex 18, Ex 19 (2c)

Théorème 3.2.1. Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y)$$

Remarque 3.2.2. Dans ce cas la loi du couple est simplement le produit des deux lois

3.2.2 Loi du max, loi du min, loi de la somme

- Loi de la somme

Méthode 3.8. Pour déterminer la loi de la va $X + Y$ quand on connaît les lois de X et de Y , avec X et Y indépendantes, on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support $(X + Y)(\Omega)$ à partir de ceux de X et Y .
2. On considère le système complet d'événements associé à X : $\{X = n, n \in X(\Omega)\}$.
3. Pour $k \in (X + Y)(\Omega)$, on détermine $P(X + Y = k)$ en appliquant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{n \in X(\Omega)} P(X + Y = k \cap X = n) \\ &= \sum_{n \in X(\Omega)} P(Y = k - n \cap X = n) \end{aligned}$$

4. On réduit alors la somme en trouvant les conditions sur n pour que $k - n \in Y(\Omega)$.
5. On utilise l'indépendance des va X et Y pour se ramener à

$$P(X + Y = k) = \sum_{n \in ??} P(Y = k - n)P(X = n).$$

6. On remplace les probabilités par leurs valeurs et on calcule la somme.

- Voir TD17 Ex 6 Ex 8, Ex 12, Ex 13

- Loi du max

Méthode 3.9. Pour déterminer la loi de $\max(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ quand on connaît les lois de X et Y , avec X et Y indépendantes et à valeurs entières, on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support de $\max(X, Y)(\Omega)$ à partir de ceux de X et Y .
2. Pour $k \in \max(X, Y)(\Omega)$, on justifie que " $\max(X, Y) \leq k$ " = " $X \leq k$ " $\cap$ " $Y \leq k$ ".
3. On utilise l'indépendance des va X et Y pour se ramener à :

$$P(\max(X, Y) \leq k) = P([X \leq k] \cap [Y \leq k]) = P(X \leq k)P(Y \leq k)$$

4. On utilise les fonctions de répartition de X et Y pour obtenir

$$P(\max(X, Y) \leq k) = F_X(k)F_Y(k)$$

5. Enfin on a " $\max(X, Y) = k$ " = " $\max(X, Y) \leq k$ mais pas $\max(X, Y) \leq k - 1$ " car X et Y à valeurs entières, donc

$$P(\max(X, Y) = k) = P(\max(X, Y) \leq k) - P(\max(X, Y) \leq k - 1)$$

- Voir TD17 Ex 6, Ex 7

- Loi du min

Méthode 3.10. Pour déterminer la loi de $\min(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ quand on connaît les lois de X et Y , avec X et Y indépendantes et à valeurs entières, on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support de $\min(X, Y)(\Omega)$ à partir de ceux de X et Y .
2. Pour $k \in \max(X, Y)(\Omega)$, on justifie que " $\min(X, Y) \geq k$ " = " $X \geq k$ " $\cap$ " $Y \geq k$ ".
3. On utilise l'indépendance des va X et Y pour se ramener à :

$$P(\min(X, Y) \geq k) = P([X \geq k] \cap [Y \geq k]) = P(X \geq K)P(Y \geq k)$$

4. On utilise les fonctions de répartitions de X et Y pour avoir :

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1) = 1 - F_X(k - 1)$$

$$P(Y \geq k) = 1 - P(y \leq k - 1) = 1 - F_Y(k - 1)$$

5. On en déduit :

$$P(\min(X, Y) \geq k) = (1 - F_X(k - 1))(1 - F_Y(k - 1))$$

6. Enfin on a " $\min(X, Y) = k$ " = " $\min(X, Y) \geq k$ mais pas $\min(X, Y) \geq k + 1$ " car X et Y à valeurs entières, donc

$$P(\min(X, Y) = k) = P(\min(X, Y) \geq k) - P(\min(X, Y) \geq k + 1)$$

- Voir TD17 Ex 6, Ex 7

Remarque 3.2.3. Les méthodes pour loi du max et loi du min peuvent se généraliser à l'étude du max/min de n variables (et non seulement 2).

4 Algèbre linéaire

4.1 Espaces vectoriels

4.1.1 Espaces vectoriels de référence, leurs bases canoniques et leur dimension

Définition 4.1.1.

- $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel sa base canonique est $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ avec $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ le 1 étant en i -ème place. $\dim \mathbb{R}^n = n$
- $\mathbb{R}[x]$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, sa base canonique est $(1, X, X^2, X^3, \dots)$. $\dim \mathbb{R}[x] = +\infty$
- $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, sa base canonique est $(1, X, X^2, X^3, \dots, X^n)$. $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$
- $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Il ne possède pas de base. $\dim \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = +\infty$
- Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Sa base canonique est $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ Avec $E_{i,j}$ la matrice ne contenant que des 0 sauf en position (i, j) où elle contient un 1. $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = n \times p$
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs réelles est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. La base canonique est $(u^i)_{i \in \mathbb{N}}$ où $u_n^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}$. $\dim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = +\infty$

4.1.2 Sous-espaces vectoriels

Méthode 4.1 (Montrer que l'on a un sev méthode 1).

Pour montrer qu'un espace **F est un sous-espace vectoriel de E** lorsque l'on est dans un exercice théorique ou en dimension n quelconque ou infinie (en résumé si l'on ne cherche pas de base dans l'immédiat), on peut suivre pas à pas les trois étapes du théorème ?? :

1. On montre que $F \subset E$.
2. On montre que $0_E \in F$:
 - (a) On se demande ce qui caractérise l'appartenance à F .
 - (b) On montre que 0_E vérifie cette condition.
3. On montre que F est stable par combinaison linéaire :

Soient u et $v \in F$, soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$, on veut montrer que $\lambda.u + \mu.v \in F$.

 - (a) On écrit explicitement $\lambda.u + \mu.v$.
 - (b) On se demande ce qui caractérise l'appartenance à F .
 - (c) On montre que $\lambda.u + \mu.v$ vérifie cette condition.

- Voir TD12 Ex 3, Ex 5, Ex 15 (1)

Méthode 4.2 (Montrer que l'on a un sev méthode 2).

Pour montrer qu'un espace F est un sous-espace vectoriel de E lorsque l'on est dans un exercice concret en petite dimension ou si la question suivante est de déterminer une base du sev. On peut chercher à écrire F sous forme de Vect. Alors F est un ev.

1. On prend un vecteur u quelconque dans F avec ses coordonnées
2. On résout l'équation (ou le système d'équation) qui définit F au maximum (à moins que les équations soient reliées entre elles chaque équation permet d'éliminer une inconnue)
3. Après avoir résolu notre système les inconnues sont toutes écrites en fonction d'un nombre limité d'inconnues on remplace donc dans le vecteur u
4. On a maintenant la forme des vecteurs de F en séparant les inconnues restantes cela permet d'écrire F sous forme de Vect.

- Voir TD12 Ex 4

4.1.3 Familles de vecteurs

Méthode 4.3. Pour déterminer si une famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ est libre :

- Si $n = 1$: $\{u\}$ avec $u \neq 0_E$ forme une famille libre.
- Si $n = 2$: $\{u_1, u_2\}$ est libre si et seulement si u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires.
- Sinon, on considère $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$. La famille est libre si et seulement si $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
- S'il s'agit d'une famille de polynôme on commence par regarder si les degrés sont distincts 2 à 2.

- Voir TD12 Ex 4, Ex 9, Ex 6, Ex 7

Méthode 4.4. Pour déterminer une base d'un sev F . On écrit F sous forme $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ (voir précédemment) cela nous donne le fait que F est un espace vectoriel et que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F . Il ne reste plus qu'à vérifier qu'elle est libre (cf précédemment)

- Voir TD12 Ex 4, Ex 6, Ex 7

Méthode 4.5. Si on nous donne une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ et que l'on nous demande de vérifier qu'elle est génératrice de E .

On considère $w \in E$ et on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$w = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n.$$

On écrit le système correspondant à cette équation et on essaye de l'inverser, c'est-à-dire d'exprimer $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en fonction des coordonnées de w .

- Si on y parvient, alors la famille est génératrice et on a déterminé une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$ qui donne w .
- Si le système n'a pas de solution, alors la famille n'est pas génératrice.

Remarque 4.1.1. Cela est très occasionnel. Il est généralement plus simple de travailler avec la dimension et la liberté de la famille (voir la suite)

Méthode 4.6. Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ donnée est une base de F . On peut au choix :

- Montrer qu'elle est libre et que $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim F$ (préférentiel car la liberté est plus simple à montrer que le côté générateur)
- Montrer qu'elle est génératrice et que $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim F$
- Montrer qu'elle est libre et génératrice
- Regarder le rang de la famille $\mathcal{F}$ si il est égal à $\text{Card}(\mathcal{F})$ et à $\dim F$ alors $\mathcal{F}$ est une base de F .

- Voir TD18 Ex 21, Ex 15 (1), Ex 3

4.1.4 Intersection de sev, Somme de sev

Méthode 4.7. Pour déterminer $F \cap G$ et sa dimension.

1. Si F et G sont définies par des équations alors on détermine $F \cap G$ comme lorsque l'on détermine un Vect. Un vecteur est dans $F \cap G$ s'il vérifie toutes les équations de F et de G
2. Si F et G sont écrits sous forme de Vect (ex $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$) alors $u \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} u = au_1 + bu_2 \\ u = cv_1 + dv_2 + ev_3 \end{cases}$. On a donc $au_1 + bu_2 = cv_1 + dv_2 + ev_3$ et on détermine à quelle condition cela est possible.
3. Si F est sous forme de Vect (ex $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$) et G sous forme d'équation : on dit que $u = au_1 + bu_2 + cu_3$, on regarde les coordonnées de ce vecteur en fonction de a, b, c et on injecte cela dans les équations de G , on résout alors le système en a, b, c .

- Voir TD18 Ex 5, Ex 9, Ex 10, Ex 12, Ex 20, Ex 22

Méthode 4.8. Si $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ et $G = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$. Alors $F + G = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p)$. Il reste à regarder le rang de la famille $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_p)$ pour avoir la dimension de $F + G$

Méthode 4.9. Si l'on connaît $\dim F$, $\dim G$ et $\dim F \cap G$ alors la formule de Grassmann

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

nous permet de déterminer la dimension de $F + G$. En particulier si $\dim F + G = \dim E$ alors $F + G = E$.

- Voir TD18 Ex 5, Ex 9, Ex 10, Ex 12, Ex 20, Ex 22

Méthode 4.10 (Espaces supplémentaires).

Pour montrer que deux espaces F et G sont supplémentaires dans E on peut

- Montrer $\begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$
- Si l'on a une base de F et une base de G , concaténer les deux bases et vérifier si cela donne une base de E (libre + bon nombre d'éléments)
- Prendre un élément quelconque de E et vérifier s'il peut s'écrire de façon unique comme un élément de F + un élément de G .
- Voir TD18 Ex 16, Ex 9, Ex 10

4.2 Applications linéaires

4.2.1 Définition, Noyau, Image

Méthode 4.11. Pour montrer que $f : E \rightarrow F$ est linéaire, on considère $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, puis on montre que

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

- Voir TD19, Ex 1, Ex 2, Ex 3, Ex 6...

Méthode 4.12. Si il y a une condition pour être dans E (ex $\mathbb{R}_n[x]$ le degré doit être inférieur à n) alors pour vérifier que l'on a un endomorphisme on vérifie que f est linéaire et que l'image d'un vecteur vérifie la/les conditions pour être dans E (ex $f(P)$ de degré inférieur à n)

Méthode 4.13. Pour déterminer le noyau de $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on considère $u \in E$ et on résout l'équation (ou le système d'équations) $f(u) = 0_F$.

- Voir TD19 Ex 13, 14, Exemples du cours

Méthode 4.14. Pour savoir si f est injective, on détermine le noyau de f et

$$\ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow f \text{ injective}$$

Méthode 4.15. Pour déterminer l'image de $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on considère une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E (la base canonique par exemple). On regarde les images des vecteurs de cette base. Et

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Pour déterminer la dimension de $\text{Im}(f)$ il reste à regarder le rang de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

- Voir TD19 Ex 14

Méthode 4.16.

Si on a déjà déterminé le noyau de f et sa dimension, on peut également utiliser le théorème du rang

$$\dim(E) = \dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f)$$

pour déterminer le rang de f . Ou inversement.

Méthode 4.17.

En particulier si E et F sont de même dimension alors il suffit d'avoir $\ker(f) = \{0\}$ (donc f injective) pour avoir f bijective.

4.2.2 Projection, Formes linéaires

Méthode 4.18. Pour déterminer l'expression du projecteur sur F parallèlement à G , avec F et G deux espaces vectoriels supplémentaires dans E , on procède par étapes :

1. *Analyse* : Soit $u \in E$, on veut écrire $u = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.
 - (a) On caractérise l'appartenance à F : f est de la forme ...
 - (b) On caractérise l'appartenance à G : g est de la forme ...
 - (c) On écrit $u = f + g$ et on détermine les constantes pour que cette égalité soit vraie.
2. *Synthèse* : On vérifie que les f et g trouvés appartiennent respectivement à F et G , puis que $f + g = u$.
3. *Conclusion* : Le projecteur sur F parallèlement à G est

$$\begin{aligned} p : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f. \end{aligned}$$

- Voir TD19 Ex 26, Ex 27

Méthode 4.19. Pour montrer que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, on montre que p est idempotent ($p \circ p = p$). On peut alors conclure que p est un projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

- Voir TD19 Ex9

4.2.3 Application linéaire et matrice

Méthode 4.20. Pour écrire la matrice de $f : E \rightarrow F$ dans les bases canoniques de E et F , on pose $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E , $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ la base canonique de F . On calcule $f(e_1), \dots, f(e_n)$ et on les écrits en colonne dans la matrice.

- Voir TD19 Ex 4

Méthode 4.21. Inversement si on connaît $A = \text{mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$ alors pour déterminer $f(u)$ on peut faire AU avec U les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}_E$ écrites en colonnes.

Méthode 4.22. Pour calculer le rang de f on peut alors calculer le rang de la matrice de f .

Méthode 4.23. Si f est un endomorphisme, pour calculer f^2 (ou f^n) on peut écrire la matrice A de f , puis déterminer A^2 (ou A^n cf 1er semestre) puis en déduire f^n .

Méthode 4.24. Si f est un automorphisme, pour calculer f^{-1} on peut écrire la matrice A de f , puis déterminer A^{-1} (cf 1er semestre) puis en déduire f^{-1} . Ou inversement il est parfois plus facile d'inverser f que A .