
TD 2 - Éléments de logique - Ensembles - Raisonnements usuels

Exercice 1.

Parmi les propriétés suivantes, déterminer celles qui sont équivalentes entre elles.

1. S'il pleut ou s'il neige, la compétition est annulée.
2. Si la compétition n'est pas annulée, alors il ne neige pas ni ne pleut.
3. Si la compétition est annulée, alors il pleut ou il neige.
4. S'il pleut alors la compétition est annulée, et s'il neige alors la compétition est annulée.
5. S'il ne neige pas ni ne pleut, alors la compétition n'est pas annulée.

Exercice 2.

Traduire sous forme d'implication les énoncés suivants :

1. Si au moins 10 personnes sont présentes, alors la séance a lieu.
2. La séance a lieu seulement si au moins 10 personnes sont présentes.
3. La séance a lieu si au moins 10 personnes sont présentes.

Exercice 3.

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$

1. $x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \dots\dots\dots x = 2$
2. $x \in \mathbb{N}, x^2 = 4 \dots\dots\dots x = 2$
3. $x \in \mathbb{Z}, \cos(x) = 1 \dots\dots\dots x = 0$

Exercice 4.

On considère les assertions suivantes :

- a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
- b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
- d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$

Déterminer si elles sont vraies ou fausses puis écrire leur négation.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Quelle différence de sens y a-t-il entre les deux assertions proposées ?

a)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$$
$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$$

b)

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$$
$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$$

c)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$$
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$$

Exercice 6.

On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .
2. Déterminer toutes les parties de E contenant uniquement des entiers pairs.
3. Déterminer toutes les parties de E contenant au moins un entier pair et un entier impair.
4. Déterminer toutes les parties de E contenant au moins un entier impair ou au moins un entier supérieur à 3.

Exercice 7.

Expliciter l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$.

Exercice 8.

Compléter par le symbole $\in$ ou $\subset$.

1. $1 \dots \{1, 2, 3\}$
2. $\{1\} \dots \{1, 2, 3\}$
3. $\mathbb{N} \dots \mathbb{Z}$
4. $\emptyset \dots \mathbb{R}$
5. $\mathbb{Z} \dots \mathcal{P}(\mathbb{R})$
6. $x \dots E$ où E est un ensemble.
7. $A \dots B$ où A et B sont des ensembles.

Exercice 9.

Soient $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ et $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

1. Déterminer l'ensemble $A \cap B$.
2. Déterminer l'ensemble $A \cup B$.
3. Déterminer l'ensemble $\{a \in A, \exists b \in B, a = b - 1\}$.
4. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies.
 - (a) $2 \in A$
 - (b) $B = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ est pair}\}$
 - (c) $A \in \mathbb{N}$
 - (d) $B \subset A$

Exercice 10.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $A_n = [1, n]$. Déterminer :

- a) $\bigcup_{1 \leq n \leq 5} A_n$
- b) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$
- c) $\bigcap_{1 \leq n \leq 5} A_n$
- d) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$

Exercice 11.

Montrer que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$

Exercice 12.

A-t-on $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cup F)$?

Exercice 13.

Soient A et B des parties d'un ensemble E . Montrer que

$$(A = B) \iff (A \cup B = A \cap B).$$

Exercice 14.

Montrer : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x^2 + y^2 = 0) \iff (x = y = 0)$.

Exercice 15.

Le but de cet exercice est de montrer que l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0$$

n'a pas de solution réelle.

1. Montrer que $x = 1$ n'est pas solution de l'équation.
2. On raisonne par l'absurde. Montrer que si y est une solution réelle de l'équation alors $y^3 = 1$.
3. Conclure.

Exercice 16.

1. Montrer que " ab pair" $\Rightarrow$ " a ou b pair".
2. Montrer que " ab impair" $\Rightarrow$ " a et b impairs".

Exercice 17.

Démontrer que si vous rangez $n + 1$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.