

---

Devoir surveillé 1 du 19/09/2025  
Durée 3h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 2 pages

---

**Exercice 1.** *Calculs*

1. Calculer  $\sum_{k=0}^n \frac{4^{2k-2}}{5^{-k+1}}$ .

*Indication : Essayez en utilisant les propriétés des puissances de vous ramener à  $Cste \times \sum_{k=0}^n q^k$*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{4^{2k-2}}{5^{-k+1}} &= \sum_{k=0}^n \frac{4^{2k} \times 4^{-2}}{5^{-k} \times 5} \\ &= \frac{4^{-2}}{5} \sum_{k=0}^n (4^2)^k \times 5^k \\ &= \frac{1}{4^2 \times 5} \sum_{k=0}^n (4^2 \times 5)^k \\ &= \frac{1}{4^2 \times 5} \times \frac{1 - (4^2 \times 5)^{n+1}}{1 - 4^2 \times 5} \\ &= \frac{1}{80} \times \frac{1 - 80^{n+1}}{-79} \\ &= \frac{1}{80} \times \frac{80^{n+1} - 1}{79}\end{aligned}$$

2. Calculer  $\sum_{k=0}^n k(k+1)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k(k+1) &= \sum_{k=0}^n k^2 + k \\ &= \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} \\ &= \frac{2n(n+1)(n+2)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

3. On cherche à calculer  $\sum_{k=0}^n k \times k!$

(a) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \times k! = (k+1)! - k!$

$$\begin{aligned}(k+1)! - k! &= (k+1) \times k! - k! \\ &= k \times k! + k! - k! \\ &= k \times k!\end{aligned}$$

(b) En déduire la valeur de la somme.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n k \times k! &= \sum_{k=0}^n (k+1)! - k! \\ &= (n+1)! - 0! \text{ par télescopage} \\ &= (n+1)! - 1\end{aligned}$$

### Exercice 2.

Soit  $(u_n)$  une suite définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ . Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2}{2n+1}$

Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : " $u_n = \frac{2}{2n+1}$ ".

- Initialisation :  $u_0 = 2$  et  $\frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2$  donc  $\mathcal{P}(0)$  est vérifiée.
- Hérédité : Soit  $n \geq 0$  supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie et montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. On sait que
 
$$u_n = \frac{2}{2n+1}$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

Alors

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+u_n} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{1 + \frac{2}{2n+1}} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} \\ &= \frac{2}{2n+1+2} \\ &= \frac{2}{2n+3} \\ &= \frac{2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n+3} \\ &= \frac{2}{2n+3} = \frac{2}{2(n+1)+1}\end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie

- Conclusion : Par principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2}{2n+1}$

**Exercice 3.**

On rappelle que  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \frac{1}{u_n - 2} + 2 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est bien définie et que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\mathcal{P}(n)$  : " $u_n$  existe et  $u_n > 2$ "

- Initialisation :  $u_0$  existe et  $u_0 = 4 > 2$  donc  $\mathcal{P}(0)$  est vérifiée.
- Hérédité : Soit un  $n \geq 0$  supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie et montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie. On sait que

—  $u_n$  existe et  $u_n > 2$

—  $u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 2} + 2$

On veut montrer que  $u_{n+1}$  existe et  $u_{n+1} > 2$ .

Or  $u_n > 2$  donc  $u_n \neq 2$  donc  $u_n - 2 \neq 0$ . Ainsi  $u_{n+1}$  existe bien. De plus  $u_{n+1} - 2 = \frac{1}{u_n - 2}$ ,

or  $u_n > 2$  donc  $u_n - 2 > 0$  donc  $\frac{1}{u_n - 2} > 0$ . Ainsi  $u_{n+1} > 2$ .

$\mathcal{P}(n+1)$  est donc vraie.

- Conclusion : Par principe de récurrence : pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $u_n$  existe et  $u_n > 2$ .

2. On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = \ln(u_n - 2)$ . Justifier que  $(v_n)$  est bien définie.

Comme  $u_n > 2$ , on a  $u_n - 2 > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc  $\ln(u_n - 2)$  est bien défini, la suite  $(v_n)$  est bien définie.

3. Quelle est la nature de la suite  $(v_n)$  ?

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1} - 2) \\ &= \ln\left(\frac{1}{u_n - 2} + 2 - 2\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{u_n - 2}\right) \\ &= -\ln(u_n - 2) \\ &= -v_n \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $-1$

4. En déduire la formule explicite de  $v_n$  puis de  $u_n$ .

La suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $-1$  et de premier terme  $v_0 = \ln(u_0 - 2) = \ln(4 - 2) = \ln(2)$ . Ainsi  $v_n = \ln(2) \times (-1)^n$

Or  $v_n = \ln(u_n - 2)$  donc  $u_n - 2 = e^{v_n}$  et donc

$$\begin{aligned} u_n &= e^{v_n} + 2 \\ &= e^{(-1)^n \ln(2)} + 2 \\ &= (e^{\ln(2)})^{(-1)^n} + 2 \\ &= 2^{(-1)^n} + 2 \end{aligned}$$

Donc si  $n$  pair :  $u_n = 2 + 2 = 4$  si  $n$  impair :  $u_n = \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$ .

**Exercice 4.**

On étudie l'évolution de deux fourmilières  $A$  et  $B$ . Chaque mois, 20% des fourmis de la population  $A$  passent en  $B$  et 30% des fourmis de la population  $B$  passent en  $A$ .

On note  $a_n$  et  $b_n$  le nombre de milliers de fourmis, le mois  $n$ , respectivement dans les fourmilières  $A$  et  $B$ . Initialement, on a  $a_0 = 320$  et  $b_0 = 180$  et on définit ainsi les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sur  $\mathbb{N}$ .

1. Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3b_n \\ b_{n+1} = 0,2a_n + 0,7b_n \end{cases}$$

Au mois  $n + 1$  20% des fourmis de la colonie  $A$  du mois  $n$  passent en  $B$  donc 80% des fourmis restent dans la colonie  $A$ . De même 30% des fourmis de la colonie  $B$  partent en  $A$  et les 70% restants restent dans la colonie  $B$ .

Ainsi au mois  $n + 1$  la colonie  $A$  contient  $0,8a_n$  fourmis qui étaient déjà dans la colonie  $A$  et  $0,3b_n$  fourmis qui étaient auparavant dans la colonie  $B$ .

Donc  $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3b_n$ . De même  $b_{n+1} = 0,2a_n + 0,7b_n$ .

2. Que vaut  $a_n + b_n$  pour tout entier naturel  $n$  ?

On remarque que  $a_{n+1} + b_{n+1} = 0,8a_n + 0,3b_n + 0,2a_n + 0,7b_n = a_n + b_n$ . La suite  $(a_n + b_n)$  est donc stationnaire. Ainsi  $a_n + b_n = a_0 + b_0 = 320 + 180 = 500$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

3. En déduire une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite  $(a_n)$ .

Comme  $a_n + b_n = 500$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a donc  $b_n = 500 - a_n$ . Ainsi en substituant dans  $a_{n+1}$  on obtient :

$$a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3(500 - a_n) = 0,5a_n + 150 = \frac{1}{2}a_n + 150$$

4. Déterminer le terme général de  $(a_n)$  puis celui de  $(b_n)$ .

La suite  $(a_n)$  est une suite arithmético-géométrique. On résout :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}x + 150 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 150 \\ &\Leftrightarrow x = 300 \end{aligned}$$

Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = a_n - 300$ . Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 300 \\ &= \frac{1}{2}a_n + 150 - 300 \\ &= \frac{1}{2}a_n - 150 \\ &= \frac{1}{2}(a_n - 300) \\ &= \frac{1}{2}u_n \end{aligned}$$

La suite  $(u_n)$  est donc géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $u_0 = a_0 - 300 = 320 - 300 = 20$  donc

$$u_n = 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors

$$a_n = u_n + 300 = 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 300$$

Et donc

$$b_n = 500 - a_n = 200 - 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

**Problème 1.** *Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3*

1. Dans cette question, on considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = 4 \quad u_1 = -5 \quad u_2 = 13 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Soit  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} + 2u_n$ .

- (a) Calculer  $v_0$  et  $v_1$ .

$$v_0 = u_1 + 2u_0 = -5 + 2 \times 4 = -5 + 8 = 3$$

- (b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  alors

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+3} + 2u_{n+2} \\ &= 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2} \\ &= 2(u_{n+2} + 2u_{n+1}) - u_{n+1} - 2u_n \\ &= 2v_{n+1} - v_n \end{aligned}$$

On a bien  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$

- (c) Déterminer l'expression de la suite  $(v_n)$ .

Deux pistes : soit on remarque que la suite  $(v_n)$  est arithmétique (chose que l'on prouve rapidement avec un raisonnement par récurrence cf cours), soit on étudie la suite  $(v_n)$  comme une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

La suite  $(v_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, l'équation caractéristique est

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x - 1 \\ \iff x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ \iff (x - 1)^2 &= 0 \\ \iff x &= 1 \end{aligned}$$

Ce polynôme n'a donc qu'une seule racine : 1. On en déduit que qu'il existe  $A$  et  $B$  dans  $\mathbb{R}$  tels que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 1^n(An + B) = An + B$$

Or  $v_0 = 3 = B$  et  $v_1 = 3 = A + B$ . On en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 3$ .

- (d) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -2u_n + 3$ .

On sait que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 3$  et  $v_n = u_{n+1} + 2u_n$ . Ainsi  $3 = u_{n+1} + 2u_n$ . Et donc  $u_{n+1} = -2u_n + 3$ .

- (e) Déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On a vu à la question précédente que  $(u_n)$  est une suite arithmético-géométrique. On regarde donc l'équation

$$\begin{aligned} x &= -2x + 3 \\ \iff 3x &= 3 \\ \iff x &= 1 \end{aligned}$$

On pose alors la suite  $(w_n)$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n - 1$ . Alors

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -2u_n + 3 - 1 = -2u_n + 2 = -2(u_n - 1) = -2w_n$$

Donc la suite  $(w_n)$  est une suite géométrique de raison  $-2$  est de premier terme  $w_0 = u_0 - 1 = 4 - 1 = 3$ .

On a donc  $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 3 \times (-2)^n$ . Et donc  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = w_n + 1 = 3 \times (-2)^n + 1$ .

- (f) Calculer  $\sum_{k=0}^n u_k$ .

On a alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n 3 \times (-2)^k + 1 \\
 &= 3 \sum_{k=0}^n (-2)^k + \sum_{k=0}^n 1 \\
 &= 3 \times 1 \times \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} + 1 \times (n+1) \\
 &= 3 \times \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} + n + 1
 \end{aligned}$$

2. Dans cette question, on considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = 2 \quad u_1 = -2 \quad u_2 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = u_n - (-2)^n$ .

- (a) Montrer par récurrence sur  $n$  que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0$$

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : " $t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0$ "

Montrons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Initialisation : Soit  $n = 0$ .  $t_0 = u_0 - (-2)^0 = 2 - 1 = 1$ ,  $t_1 = u_1 - (-2)^1 = -2 + 2 = 0$  et  $t_2 = u_2 - (-2)^2 = 3 - 4 = -1$ . Ainsi

$$t_2 - 2t_1 + t_0 = 1 - 2 \times 0 - 1 = 0$$

$\mathcal{P}(0)$  est donc vraie.

Hérédité : Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire :

$$t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0$$

Soit :

$$u_{n+2} - (-2)^{n+2} - 2(u_{n+1} - (-2)^{n+1}) + u_n - (-2)^n = 0$$

c'est-à-dire

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n - (-2)^{n+2} - (-2)^{n+2} - (-2)^n = 0$$

Regardons le rang  $n+1$ .

$$t_{n+3} = u_{n+3} - (-2)^{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n - (-2)^{n+3}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 t_{n+3} - 2t_{n+2} + t_{n+1} &= 3u_{n+1} - 2u_n - (-2)^{n+3} - 2(u_{n+2} - (-2)^{n+2}) + u_{n+1} - (-2)^{n+1} \\
 &= -2u_{n+2} + 4u_{n+1} - 2u_n - (-2)^{n+3} - (-2)^{n+3} - (-2)^{n+1} \\
 &= -2 \times (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n - (-2)^{n+2} - (-2)^{n+2} - (-2)^n) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ainsi  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

Conclusion : Par récurrence on a démontré que  $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0$ .

- (b) Déterminer alors l'expression de  $t_n$  en fonction de  $n$ .

De la même manière que pour  $v_n$  plus haut la seule racine de l'équation caractéristique est 1. Ainsi  $\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $t_n = An + B$ . Or  $t_0 = 1 = B$  et  $t_1 = 0 = A + B$  Donc nécessairement  $B = 1$  et  $A = -1$ . Ainsi  $t_n = -n + 1 \forall n \in \mathbb{N}$ .

- (c) En déduire que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 1 - n + (-2)^n$ .

On sait que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $t_n = u_n - (-2)^n$ , on a donc  $u_n = t_n + (-2)^n$ . Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 - n + (-2)^n$$

- (d) Calculer  $\sum_{k=0}^n u_k$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n (1 - k + (-2)^k) \\ &= \sum_{k=0}^n 1 - \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n (-2)^k \\ &= n + 1 - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} \\ &= \frac{(2-n)(n+1)}{2} + \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} \end{aligned}$$