
Devoir surveillé 1 du 19/09/2025
Durée 3h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 2 pages

Exercice 1. Calculs

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{4^{2k-2}}{5^{-k+1}}$.

Indication : Essayez en utilisant les propriétés des puissances de vous ramener à $Cste \times \sum_{k=0}^n q^k$

2. Calculer $\sum_{k=0}^n k(k+1)$

3. On cherche à calculer $\sum_{k=0}^n k \times k!$

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \times k! = (k+1)! - k!$

(b) En déduire la valeur de la somme.

Exercice 2.

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$

Exercice 3.

On rappelle que $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \frac{1}{u_n - 2} + 2 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$. Justifier que (v_n) est bien définie.
3. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
4. En déduire la formule explicite de v_n puis de u_n .

Exercice 4.

On étudie l'évolution de deux fourmilières A et B . Chaque mois, 20% des fourmis de la population A passent en B et 30% des fourmis de la population B passent en A .

On note a_n et b_n le nombre de milliers de fourmis, le mois n , respectivement dans les fourmilières A et B . Initialement, on a $a_0 = 320$ et $b_0 = 180$ et on définit ainsi les suites (a_n) et (b_n) sur $\mathbb{N}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} &= 0,8a_n + 0,3b_n \\ b_{n+1} &= 0,2a_n + 0,7b_n \end{cases}$
2. Que vaut $a_n + b_n$ pour tout entier naturel n ?
3. En déduire une relation de récurrence d'ordre 1 sur la suite (a_n) .
4. Déterminer le terme général de (a_n) puis celui de (b_n) .

Problème 1. *Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3*

1. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 4 \quad u_1 = -5 \quad u_2 = 13 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} + 2u_n$.

- (a) Calculer v_0 et v_1 .
 - (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.
 - (c) Déterminer l'expression de la suite (v_n) .
 - (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = -2u_n + 3$.
 - (e) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (f) Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$.
2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad u_1 = -2 \quad u_2 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$$

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = u_n - (-2)^n$.

- (a) Montrer par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n = 0$$

- (b) Déterminer alors l'expression de t_n en fonction de n .
- (c) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - n + (-2)^n$.
- (d) Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$.