

Devoir surveillé 2 du 7/11/2025
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 2 pages

Exercice 1.

Partie 1 : deux nouvelles fonctions

On définit les fonctions appelées "sinus hyperbolique" et "cosinus hyperbolique", notées respectivement sh et ch, en posant pour tout réel x : $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. Ecrire deux fonctions Python pour définir sh et ch.

```
1 def ch(x):
2     return (np.exp(x)+np.exp(-x))/2
```

```
1 def sh(x):
2     return (np.exp(x)-np.exp(-x))/2
```

2. (a) Etudier la parité de la fonction sh.

La fonction sh est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus

$$\begin{aligned}\text{sh}(-x) &= \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} \\ &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} \\ &= -\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= -\text{sh}(x)\end{aligned}$$

La fonction sh est donc impaire.

- (b) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction sh.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0. \text{ Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty. \text{ Ainsi } \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty.$$

- (c) Dresser le tableau de variations de la fonction sh.

On commence par calculer la dérivée de sh. On a :

$$\text{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$. Donc $\text{sh}'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction sh est donc strictement croissante. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\text{sh}'(x)$	+	
sh	$-\infty$	$+\infty$

(d) Déterminer le signe de la fonction sh.

$$\begin{aligned}
 \text{sh}(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow e^x \geq e^{-x} \\
 &\Leftrightarrow x \geq -x \text{ car la fonction } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
 &\Leftrightarrow 2x \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x \geq 0
 \end{aligned}$$

On a donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh}'(x)$	$-$	0	$+$

3. (a) Etudier la parité de la fonction ch.

La fonction ch est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus

$$\begin{aligned}
 \text{ch}(-x) &= \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} \\
 &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

La fonction ch est donc paire.

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction ch, limites comprises.

Commençons par calculer la dérivée de ch.

$$\text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x)$$

Or on a déterminé le signe de sh dans la question 2d.

De plus on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$ et $f(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$ On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$	$-$	0	$+$
ch	$+\infty$	1	$+\infty$.

Il ne reste plus qu'à calculer les limites

4. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) > \text{sh}(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
 \text{ch}(x) - \text{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
 &= \frac{2e^{-x}}{2} \\
 &= e^{-x} > 0
 \end{aligned}$$

Donc $\text{ch}(x) > \text{sh}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (b) Tracer sur un même graphique les allures des courbes de ch et sh . On pourra préciser pour les deux courbes l'équation de la tangente en 0, et les dessiner au voisinage de 0.

On rappelle que l'équation de la tangente en x_0 de f si f est dérivable en x_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Donc $T_0(\text{sh}) : y = \text{ch}(0)(x - 0) + \text{sh}(0) = x$. Et $T_0(\text{ch}) : y = \text{sh}(0)(x - 0) + \text{ch}(0) = 1$

5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, (\text{ch}(x))^2 - (\text{sh}(x))^2 = 1$.

$$\begin{aligned} \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\ &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Partie 2 : une troisième fonction

6. (a) Montrer que l'on définit bien une fonction, appelée "tangente hyperbolique" et notée th , en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

D'après le tableau de variations de la fonction ch , on peut dire que $\forall x \in \mathbb{R} \text{ ch}(x) \geq 1$. Donc $\text{ch}(x) \neq 0$. Ainsi la fonction th est bien définie comme quotient de fonction dont le dénominateur ne s'annule pas.

- (b) Ecrire une fonction Python pour définir la fonction th en utilisant les fonctions définies en Partie 1.

```
1 def th(x):
2     return sh(x)/ch(x)
```

- (c) Vérifier que la fonction th est impaire.

th est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et $\text{th}(-x) = \frac{\text{sh}(-x)}{\text{ch}(x)} = \frac{-\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = -\text{th}(x)$ car sh est impaire et ch est paire donc th est bien impaire.

- (d) En s'aidant des relations $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$, déterminer les variations de la fonction th .
Calculons la dérivée de th . La fonction th est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = \text{sh}(x)$, $u'(x) = \text{ch}(x)$, $v(x) = \text{ch}(x)$, $v'(x) = \text{sh}(x)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \text{th}'(x) &= \frac{\text{ch}(x) \times \text{ch}(x) - \text{sh}(x) \times \text{sh}(x)}{\text{ch}(x)^2} \\ &= \frac{(\text{ch}(x))^2 - (\text{sh}(x))^2}{(\text{ch}(x))^2} \\ &= \frac{1}{(\text{ch}(x))^2} \text{ par la question 5} \end{aligned}$$

La fonction th est donc croissante.

- (e) Dresser le tableau de variations, limites comprises, de la fonction th .

Il ne manque que les limites. Or

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th}(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\operatorname{sh}'(x)$	+	
sh	-1	$+1$

Exercice 2.

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^3 . En déduire que P est inversible et donner son inverse.

On calcule $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P^3 = I_3$. On en déduit que $P \times P^2 = P^2 \times P = I_3$ donc P est inversible et $P^{-1} = P^2$.

2. Vérifier que $A = PLP^{-1}$.

$$PLP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $A^n = PL^n P^{-1}$.

Pour tout entier naturel n , on pose $\mathcal{P}_n : (A^n = PL^n P^{-1})$.

— *Initialisation* : $\mathcal{P}_0$ est vraie car $PL^0 P^{-1} = PI_3 P^{-1} = I_3 = A^0$.

— *Hérédité* : Soit $n \geq 0$, supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. On a alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = \underbrace{PL^n P^{-1}}_{\text{par } \mathcal{H}_n} \times \underbrace{PL P^{-1}}_{=A} = PL^n \times \underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_3} \times LP^{-1} = PL^n \times LP^{-1} = PL^{n+1} P^{-1}.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

— *Conclusion* : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PL^n P^{-1}$.

- (b) Déterminer J telle que $L = I_3 + J$ puis calculer J^2 et J^3 .

Il nous faut $J = L - I_3$ soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis

$$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) A l'aide du binôme de Newton, calculer L^n .

On a $L = J + I_3$, on sait que I_3 commute avec J donc, en utilisant la formule du binôme de Newton, on a, pour tout entier $n \geq 2$, :

$$L^n = (J + I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k$$

Rappelons que $J^3 = 0_3$ donc pour tout $k \geq 3$, $J^k = 0_3$.

Par conséquent,

$$L^n = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} J^k = \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$

- (d) Dédurre des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On sait que, $PL^n P^{-1} = PP^{-1} A^n PP^{-1} = A^n$.

Le calcul matriciel donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. On considère les trois suites $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ définies par $u_1 = 1, v_1 = 0$ et $w_1 = 2$ et, pour tout entier $n \geq 1$, :

$$u_{n+1} = u_n ; v_{n+1} = v_n + 2w_n \text{ et } w_{n+1} = 2u_n + w_n.$$

- (a) Bonus : Compléter le programme `Python` suivant afin qu'étant donné un n il renvoie la valeur de u_n , v_n et w_n .

```

1 def suiteuvw(n):
2     u=
3     v=
4     w=
5     for k in range(2,n+1):
6         u=u
7         v=v+2*w
8         w=2*u+w
9     return u,v,w

```

- (b) Que pouvez-vous dire de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$? Donner u_n pour tout entier $n \geq 1$.

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est constante de valeur $u_1 = 1$.

- (c) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

On calcule $AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n + 2w_n \\ 2u_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.

Donc $X_{n+1} = AX_n$.

- (d) Établir, pour tout entier $n \geq 1$, que $X_n = A^{n-1}X_1$.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{H}_n : (X_n = A^{n-1}X_1)$.

Au rang 1, $A^{1-1}X_1 = I_3X_1 = X_1$ donc $\mathcal{H}_1$ est vrai.

Si $\mathcal{H}_n$ vrai à un rang $n \in \mathbb{N}^*$, alors $A^nX_1 = A \times A^{n-1}X_1 = A \times X_n = X_{n+1}$ donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vrai.

Donc, pour tout entier $n \geq 1$, que $X_n = A^{n-1}X_1$.

- (e) Dédurre des questions précédentes que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $v_n = 2n(n-1)$ et $w_n = 2n$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $X_n = A^{n-1}X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n-1)(n-2) & 1 & 2(n-1) \\ 2(n-1) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Donc

$X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)(n-2) + 4(n-1) \\ 2(n-1) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ (n-1)(2n-4+4) \\ 2(n-1) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n-1) \\ 2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Donc, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = 2n(n-1)$ et $w_n = 2n$.

Exercice 3.

Le but est de montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, et un seul, vérifiant les hypothèses (*) suivantes :

- P est de degré 4,
- 1 est racine au moins double de P ,
- $P(2) = 19$,
- $x \mapsto x+1$ divise $P(x) + 8$,
- le reste de la division euclidienne de P par $x \mapsto x+2$ est 27.

1. Compléter les phrases suivantes.

- (a) 1 est racine d'ordre au moins 2 de P ssi $(X-1)^2$ divise P . On notera alors Q le polynôme quotient.

- (b) $x + 1$ divise $P(x) + 8$ ssi -1 . est racine de $P(x) - 8$ ssi $P(-1) + 8 = 0$ ssi $P(-1) = -8$.
(c) Le reste de la division euclidienne de P par $x + 2$ est 27 ssi il existe $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (x + 2)Q + 27$ ssi $P(-2) = 27$

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe un polynôme P vérifiant les hypothèses (*)

- (a) i. Rappeler l'expression de $\deg(P \times Q)$ en fonction de $\deg(P)$ et $\deg(Q)$.
 $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
ii. A l'aide de la question 1.(a), écrire le polynôme P en fonction du polynôme Q correspondant. Quel est le degré de Q ?
On a : $P = (x - 1)^2 Q$ (*)
Alors comme $4 = \deg(P) = \deg((x - 1)^2 Q) = 2 + \deg(Q)$. Nécessairement $\deg(Q) = 2$.
(b) A l'aide des questions précédentes, montrer que $Q(-1) = -2$, $Q(-2) = 3$ et $Q(2) = 19$.
En évaluant (*) en $x = -1$, on a : $-8 = P(-1) = (-2)^2 Q(-1)$. Donc $-8 = 4Q(-1)$. Ainsi $Q(-1) = -2$
En évaluant (*) en $x = -2$, on a : $27 = P(-2) = (-3)^2 Q(-2)$. Donc $27 = 9Q(-2)$. Ainsi $Q(-2) = 3$
En évaluant (*) en $x = 2$, on a : $19 = P(2) = (1)^2 Q(2)$. Donc $19 = Q(2)$. Ainsi $Q(2) = 19$
(c) Déterminer alors le polynôme Q , à l'aide d'un système linéaire.
On sait que Q est de degré 2 ainsi il peut s'écrire $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Or

$$\begin{aligned} & \begin{cases} Q(-1) = -2 = a - b + c \\ Q(-2) = 3 = 4a - 2b + c \\ Q(2) = 19 = 4a + 2b + c \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix} \begin{cases} a - b + c = -2 \\ 2b - 3c = 11 \\ 6b - 3c = 27 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{matrix} \begin{cases} a - b + c = -2 \\ 2b - 3c = 11 \\ 6c = -6 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = -2 \\ 2b + 3 = 11 \\ c = -1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 + b - c = 3 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc $Q(x) = 3x^2 + 4x - 1$

- (d) En déduire qu'il existe au plus un polynôme P solution.
On a vu que si P est solution alors il s'écrit nécessairement $P = (x - 1)^2 Q$ avec $Q(x) = 3x^2 + 4x - 1$.

3. En déduire qu'il existe bien un polynôme et un seul, qui vérifie les hypothèses (*).

On pourra éventuellement utiliser les équivalences de la question 1.

Il reste à vérifier que le polynôme $P = (x - 1)^2(3x^2 + 4x - 1)$ est bien solution du problème.

Or

- $\deg(P) = 4$ dans ce cas,
- 1 est racine au moins double de P car $(x - 1)^2$ divise P

- $P(2) = (2 - 1)^2(3 \times 4 + 4 \times 2 - 1) = 1 \times (12 + 8 - 1) = 19$
- $P(-1) = (-2)^2(3 - 4 - 1) = 4 \times (-2) = -8$ donc par les équivalences énoncées au début, $x + 1$ divise $P + 8$
- $P(-2) = (-3)^2(3 \times 4 - 4 \times 2 - 1) = 9 \times (12 - 8 - 1) = 27$. Donc par les équivalences du début, le reste de la division euclidienne de P par $x + 2$ est 27.