
Devoir surveillé 2 du 7/11/2025
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 2 pages

Exercice 1.

Partie 1 : deux nouvelles fonctions

On définit les fonctions appelées "sinus hyperbolique" et "cosinus hyperbolique", notées respectivement sh et ch, en posant pour tout réel x : $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. Ecrire deux fonctions **Python** pour définir sh et ch.
2. (a) Etudier la parité de la fonction sh.
(b) Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction sh.
(c) Dresser le tableau de variations de la fonction sh.
(d) Déterminer le signe de la fonction sh.
3. (a) Etudier la parité de la fonction ch.
(b) Dresser le tableau de variations de la fonction ch, limites comprises.
4. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) > \text{sh}(x)$.
(b) Tracer sur un même graphique les allures des courbes de ch et sh. On pourra préciser pour les deux courbes l'équation de la tangente en 0, et les dessiner au voisinage de 0.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, (\text{ch}(x))^2 - (\text{sh}(x))^2 = 1$.

Partie 2 : une troisième fonction

6. (a) Montrer que l'on définit bien une fonction, appelée "tangente hyperbolique" et notée th, en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$$

- (b) Ecrire une fonction **Python** pour définir la fonction th en utilisant les fonctions définies en Partie 1.
- (c) Vérifier que la fonction th est impaire.
- (d) En s'aidant des relations $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$, déterminer les variations de la fonction th.
- (e) Dresser le tableau de variations, limites comprises, de la fonction th.

Exercice 2.

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^3 . En déduire que P est inversible et donner son inverse.
2. Vérifier que $A = PLP^{-1}$.
3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $A^n = PL^nP^{-1}$.
(b) Déterminer J telle que $L = I_3 + J$ puis calculer J^2 et J^3 .
(c) A l'aide du binôme de Newton, calculer L^n .
- (d) Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. On considère les trois suites $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ définies par $u_1 = 1, v_1 = 0$ et $w_1 = 2$ et, pour tout entier $n \geq 1$, :

$$u_{n+1} = u_n ; v_{n+1} = v_n + 2w_n \text{ et } w_{n+1} = 2u_n + w_n.$$

- (a) Bonus : Compléter le programme **Python** suivant afin qu'étant donné un n il renvoie la valeur de u_n , v_n et w_n .

```

1 def suiteuvw(n):
2     u=
3     v=
4     w=
5     for k in range(2,n+1):
6         u=
7         v=
8         w=
9     return u,v,w

```

- (b) Que pouvez-vous dire de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$? Donner u_n pour tout entier $n \geq 1$.
- (c) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
- (d) Établir, pour tout entier $n \geq 1$, que $X_n = A^{n-1}X_1$.
- (e) Dédurre des questions précédentes que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $v_n = 2n(n-1)$ et $w_n = 2n$.

Exercice 3.

Le but est de montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, et un seul, vérifiant les hypothèses (*) suivantes :

- P est de degré 4,
- 1 est racine au moins double de P ,
- $P(2) = 19$,
- $x \mapsto x+1$ divise $P(x) + 8$,
- le reste de la division euclidienne de P par $x \mapsto x+2$ est 27.

1. Compléter les phrases suivantes.

- (a) 1 est racine d'ordre au moins 2 de P ssi divise P . On notera alors Q le polynôme quotient.
- (b) $x+1$ divise $P(x) + 8$ ssi est racine de $P(x) - 8$ ssi $P(\dots) + 8 = 0$ ssi $P(\dots) = -8$.
- (c) Le reste de la division euclidienne de P par $x+2$ est 27 ssi il existe tel que ssi $P(-2) = \dots$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe un polynôme P vérifiant les hypothèses (*)

- (a) i. Rappeler l'expression de $\deg(P \times Q)$ en fonction de $\deg(P)$ et $\deg(Q)$.
 ii. A l'aide de la question 1.(a), écrire le polynôme P en fonction du polynôme Q correspondant. Quel est le degré de Q ?
- (b) A l'aide des questions précédentes, montrer que $Q(-1) = -2$, $Q(-2) = 3$ et $Q(2) = 19$.
 En évaluant (*) en $x = -1$, on a : $-8 = P(-1) = (-2)^2 Q(-1)$. Donc $-8 = 4Q(-1)$. Ainsi $Q(-1) = 2$
- (c) Déterminer alors le polynôme Q , à l'aide d'un système linéaire.
- (d) En déduire qu'il existe au plus un polynôme P solution.

3. En déduire qu'il existe bien un polynôme et un seul, qui vérifie les hypothèses (*).

On pourra éventuellement utiliser les équivalences de la question 1.