
Concours blanc 1 du 13/01/26 Sujet 1
Durée 4h, l'énoncé comporte **4 pages**

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1.

1. Soit P un polynôme quelconque de degré $n \in \mathbb{N}$.

Justifier que le degré du polynôme $x \mapsto P(x^2)$ est $2n$. On pourra commencer par écrire le polynôme P .

Soit n le degré de P alors on a $P(X) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ avec $a_n \neq 0$. Alors $P(x^2) = a_0 + a_1x^2 + \dots + a_n(x^2)^n = a_0 + a_1x^2 + \dots + a_nx^{2n}$. Donc $P(x^2)$ est de degré $2n$.

On considère E l'ensemble des polynômes à coefficients réels vérifiant la relation :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, P(x^2) = x^2(x^2 + 1)P(x) \quad (*)$$

2. Le polynôme nul est-il solution de $(*)$? Et le polynôme $x \mapsto x^3 + x$?

Soit $P_0(x) = 0$ alors $P_0(x^2) = 0$ et $x^2(x^2 + 1)P_0(x) = x^2(x^2 + 1) \times 0 = 0$ donc P_0 le polynôme nul est solution de $(*)$.

Soit $P_1(x) = x^3 + x$, alors $P_1(x^2) = (x^2)^3 + x^2 = x^6 + x^2$ et $x^2(x^2 + 1)P_1(x) = (x^4 + x^2)(x^3 + x) = x^7 + x^5 + x^5 + x^3 = x^7 + 2x^5 + x^3$. Donc P_1 n'est pas solution de $(*)$.

3. Analyse du problème : Soit P un polynôme non nul de E , donc vérifiant $(*)$.

- (a) En posant n le degré de P , montrer que $n = 4$.

Soit n le degré de P alors

— $\deg P(x^2) = 2n$ par la question 1

— $\deg x^2(x^2 + 1)P(x) = \deg x^2(x^2 + 1) + \deg P(x) = 4 + n$

Ainsi on doit avoir $2n = 4 + n$ soit $n = 4$. P est donc de degré 4.

- (b) Montrer que 0, 1, -1 sont racines de P .

Evaluons $(*)$ en $x = 0$, cela donne :

$$P(0^2) = 0^2(0^2 + 1)P(0)$$

Soit $P(0) = 0$. Donc 0 est racine de P .

De même évaluons $(*)$ en $x = 1$ cela donne :

$$P(1) = 1 \times 2 \times P(1) = P(1)$$

Soit $P(1) = 0$. Donc 1 est racine de P .

Enfin en évaluant $(*)$ en $x = -1$ on obtient

$$P(1) = 2P(-1)$$

Or on a vu que $P(1) = 0$ ainsi $P(-1) = 0$ et -1 est donc une racine de P .

- (c) En dérivant $(*)$ (attention à la dérivée de $x \mapsto P(x^2)$), montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$2P'(x^2) = 2(x^2 + 1)P(x) + 2x^2P(x) + x(x^2 + 1)P'(x)$$

D'une part $g : x \mapsto P(x^2)$ est dérivable comme composée de fonction qui le sont et

$$g'(x) = 2xP'(x^2)$$

D'autre part : $h : x \mapsto x^2(x^2 + 1)P(x)$ est dérivable comme produit de fonction qui le sont et

$$h'(x) = 2x(x^2 + 1)P(x) + x^2 \times 2x \times P(x) + x^2(x^2 + 1)P'(x)$$

Ainsi comme $g = h$, on a :

$$2xP'(x^2) = 2x(x^2 + 1)P(x) + x^2 \times 2x \times P(x) + x^2(x^2 + 1)P'(x)$$

Donc pour tout $x \neq 0$

$$2P'(x^2) = 2(x^2 + 1)P(x) + x \times 2x \times P(x) + x(x^2 + 1)P'(x)$$

Or, nous avons ici une équation polynômiale donc si elle est vraie pour tout $x \neq 0$, elle l'est aussi pour $x = 0$, ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2P'(x^2) = 2(x^2 + 1)P(x) + 2x^2 \times P(x) + x(x^2 + 1)P'(x) \quad (**)$$

- (d) Montrer alors que 0 est racine de P' . En déduire que 0 est racine au moins double de P .
En évaluant $(**)$ en $x = 0$, on a :

$$2P'(0) = 2P(0) + 0P(0) + 0P'(0) = 2P(0)$$

Or on a vu à la question précédente que $P(0) = 0$. Ainsi $P'(0) = 0$ et donc $P(0) = P'(0) = 0$, donc 0 est racine au moins double de P .

- (e) En déduire qu'il existe un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2(x-1)(x+1)$
0 est racine au moins double de P ainsi x^2 divise P . De plus 1 est racine de P donc $(x-1)$ divise P et -1 est racine de P donc $(x+1)$ divise P , ainsi $x^2(x-1)(x+1)$ divise P . Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P = x^2(x-1)(x+1)Q$. Or P est de degré 4 et $\deg x^2(x-1)(x+1) = 4$ donc nécessairement Q est de degré 0 et est donc une constante $a \neq 0$. On a donc,

$$\exists a \in \mathbb{R}^*, \quad P(x) = ax^2(x-1)(x+1)$$

4. Synthèse : déterminer tous les polynômes de l'ensemble E .

Nous avons donc démontré que si P est solution de $(*)$ soit c'est le polynôme nul soit il est de la forme $ax^2(x-1)(x+1)$, $a \in \mathbb{R}^*$. Ce que l'on peut résumer en $\exists a \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2(x-1)(x+1)$. Réciproquement, montrons que si $P(x) = ax^2(x-1)(x+1) = a(x^2(x^2-1)) = a(x^4-x^2)$, $a \in \mathbb{R}$, alors P est solution de $(*)$. En effet alors, d'une part :

$$P(x^2) = a(x^8 - x^4)$$

et d'autre part,

$$x^2(x^2 + 1)P(x) = ax^2(x^2 + 1)x^2(x^2 - 1) = ax^4(x^4 - 1) = a(x^8 - x^4)$$

Ainsi

$$P(x^2) = x^2(x^2 + 1)P(x)$$

Donc P est solution de $(*)$.

Exercice 2.

Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt.$$

On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2 .

$$\bullet \quad u_1 = \int_0^1 (1-t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\bullet u_2 = \int_0^1 (1-t^2)^2 dt = \int_0^1 (1-2t^2+t^4) dt = \left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15-10+3}{5} = \frac{8}{15}$$

2. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt - \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ &= \int_0^1 [(1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n] dt \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^n (1-t^2-1) dt \\ &= - \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n dt \end{aligned}$$

Or pour $t \in [0, 1]$, on a $t^2(1-t^2)^n \geq 0$ donc $\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est bien décroissante.

- (b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Pour tout $t \in [0, 1]$, $(1-t^2)^n \geq 0$ donc par la positivité de l'intégrale, $u_n \geq 0$, donc (u_n) est décroissante, minorée par 0. Ainsi, par théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

3. On suppose déjà démontré pour tout $n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Donner la limite de la suite (u_n) .

On remarque que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ donc par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

4. Calculer

$$\int_0^1 (1-t)^n dt,$$

puis montrer que $u_n \geq \frac{1}{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (1-t)^n$ est continue sur $[0, 1]$ comme polynôme donc intégrable sur $[0, 1]$. On calcule

$$\int_0^1 (1-t)^n dt = - \int_0^1 -(1-t)^n dt = - \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Pour $t \in [0, 1]$, $t^2 \leq t$ donc $1-t^2 \geq 1-t$ et $(1-t^2)^n \geq (1-t)^n$

En intégrant entre 0 et 1, la croissance de l'intégrale nous donne :

$$u_n \geq \frac{1}{n+1}.$$

5. (a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n , on a :

$$(2n+3)u_{n+1} = (2n+2)u_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt.$$

On pose

$$\begin{aligned} f(t) &= (1-t^2)^{n+1} & f'(t) &= (n+1)(-2t)(1-t^2)^n \\ g'(t) &= 1 & g(t) &= t \end{aligned}$$

f et g sont C^1 sur $[0, 1]$, on peut donc intégrer par parties :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left[(1-t^2)^{n+1} \times t \right]_0^1 + 2(n+1) \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n dt \\ &= 0 + 2(n+1) \int_0^1 (t^2 - 1 + 1)(1-t^2)^n dt \\ &= 2(n+1) \int_0^1 ((t^2 - 1) + 1)(1-t^2)^n dt \\ &= 2(n+1) \int_0^1 (1 - (1-t^2))(1-t^2)^n dt \\ &= 2(n+1) \int_0^1 ((1-t^2)^n - (1-t^2)(1-t^2)^n) dt \\ &= 2(n+1) \left(\int_0^1 (1-t^2)^n dt - \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt \right) \\ &= 2(n+1)(u_n - u_{n+1}) \end{aligned}$$

Soit $u_{n+1} = (2n+2)u_n - (2n+2)u_{n+1}$ et donc

$$(2n+3)u_{n+1} = (2n+2)u_n$$

C'est le résultat attendu.

- (b) Compléter le script Python ci-dessous pour qu'il calcule et affiche la valeur de u_n pour une valeur n entrée par l'utilisateur.

```
1 def suiteu(n):
2     u=1
3     for k in range(1,n+1):
4         u=(2*k)/(2*k+1)*u
5     return u
```

Exercice 3.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} + u_{n+1} - 3u_n$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

$$\text{D'une part : } X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 3u_{n+2} + u_{n+1} - 3u_n \end{pmatrix}$$

$$\text{D'autre part } AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -3u_n + u_{n+1} + 3u_{n+2} \end{pmatrix}$$

Donc $AX_n = X_{n+1}$.

2. Déterminer U , V et W de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $AU = U$, $AV = -V$ et $AW = 3W$.

On cherche $U = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $AU = U$ soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ -3 + x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

On résout donc le système $\begin{cases} x = 1 \\ y = x \\ -3 + x + 3y = y \end{cases}$. Les deux premières équations nous donnent

$x = y = 1$ et on remarque que cela fonctionne également pour la 3-eme équation. On a donc $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par le même procédé on trouve comme système pour V : $\begin{cases} x = -1 \\ y = -x \\ -3 + x + 3y = -y \end{cases}$, on trouve

alors $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Et pour W $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3x \\ -3 + x + 3y = 3y \end{cases}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

3. Considérons P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont définies par les matrices colonnes U , V et W (dans cet ordre). Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puis calculer $D = P^{-1}AP$.

On a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. Alors

$$P \times \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc P a un inverse à droite $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc P est inversible d'inverse $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De plus $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. Exprimer sans justifier X_n en fonction de X_0 , $P^{-1}P$ et D^n .

On a $X_{n+1} = AX_n$, donc $X_n = A^n X_0$. De plus $D = P^{-1}AP$, donc $A = PDP^{-1}$. Et alors $A^n = PD^nP^{-1}$.

Ainsi $X_n = PD^nP^{-1}X_0$

5. En déduire u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

On a

$$\begin{aligned} X_n &= PD^n P^{-1} X_0 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & (-1)^n & 3^n \\ 1 & (-1)^{n+1} & 3^{n+1} \\ 1 & (-1)^n & 3^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 + 9 \times (-1)^n + 3^n \\ -2 + 9 \times (-1)^{n+1} + 3^{n+1} \\ -2 + 9 \times (-1)^n + 3^{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi u_n étant la première coordonnées de X_n , on a donc $u_n = \frac{1}{8} (-2 + 9 \times (-1)^n + 3^n)$

Exercice 4.

On dispose d'une urne U contenant 2 boules noires, et d'une urne V contenant 2 boules blanches. On y effectue une suite d'épreuves comme suit : à chaque épreuve, on tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V , puis on les échange d'urne (la boule tirée de l'urne U est remise dans V et la boule tirée de l'urne V est remise dans U).

On introduit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les événements A_k (resp B_k, C_k) "à l'issue de la $k^{\text{ième}}$ épreuve, l'urne U contient 2 boules noires (resp. 1 noire, resp 0 noires)" et on notera a_k, b_k, c_k leur probabilité respective. On convient de poser $a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0$.

1. Déterminer a_1, b_1 et c_1

Comme au départ, il y a 2 noires dans U et 2 blanches dans V , nécessairement on pioche une noire dans U et une blanche dans V , et on les échange : U et V contiendront donc chacune 1B et 1 N. D'où $a_1 = 0 = c_1$ et $b_1 = 1$.

2. Justifier que pour tout entier $k \geq 1$, (A_k, B_k, C_k) forme un système complet d'événements.

Vu les intitulés, les événements A_k, B_k et C_k sont deux à deux incompatibles, et comme au total, il y a 2 B et 2 N, $A_k \cup B_k \cup C_k = \Omega$

3. Déterminer, en justifiant rapidement, les 9 probabilités conditionnelles (avec $k \geq 1$) : $P_{A_k}(A_{k+1}), P_{A_k}(B_{k+1}), P_{A_k}(C_{k+1}), P_{B_k}(A_{k+1}), P_{B_k}(B_{k+1}), P_{B_k}(C_{k+1}), P_{C_k}(A_{k+1}), P_{C_k}(B_{k+1}), P_{C_k}(C_{k+1})$. Sachant A_k , l'urne U contient 2 N (donc V a 2B), donc pour les mêmes raisons qu'au 1. :

$$P_{A_k}(A_{k+1}) = 0 = P_{A_k}(C_{k+1}) \text{ et } P_{A_k}(B_{k+1}) = 1.$$

Par symétrie, sachant C_k , le problème est le même (forcément échange d'une blanche et d'une noire lors de la $k + 1^{\text{e}}$ épreuve) :

$$P_{C_k}(A_{k+1}) = 0 = P_{C_k}(C_{k+1}) \text{ et } P_{C_k}(B_{k+1}) = 1$$

Sachant B_k , l'urne U contient 1B et 1 N comme l'urne V . Donc l'événement A_{k+1} se réalise ssi on pioche la blanche de U (une chance sur 2) et la noire de V (une chance sur 2). D'où

$$P_{B_k}(A_{k+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P_{B_k}(C_{k+1}) \text{ par symétrie}$$

Puis pour $P_{B_k}(B_{k+1})$ soit faire $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ soit réaliser qu'il y a deux cas possibles : soit on pioche la B de U et la B de V (proba $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$) soit on pioche la N de U et la N de V (même proba $1/4$) d'où

$$P_{B_k}(B_{k+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

4. Montrer que $b_{k+1} = a_k + \frac{1}{2}b_k + c_k$. Déterminer les relations de récurrences analogues pour a_{k+1} et c_{k+1}
 Formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. $(A_k, B_k, C_k) : P(B_{k+1}) = P(A_k)P_{A_k}(B_{k+1}) + P(B_k)P_{B_k}(B_{k+1}) + P(C_k)P_{C_k}(B_{k+1})$ d'où $b_{k+1} = a_k + \frac{1}{2}b_k + c_k$. Et de même, $a_{k+1} = 0 + \frac{1}{4}b_k + 0$ et $c_{k+1} = \frac{1}{4}b_k$.
5. Montrer alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_{k+1} = 1 - \frac{1}{2}b_k$.
 Il suffit de remarquer que d'après 2. $a_k + b_k + c_k = 1$ d'où $a_k + c_k = 1 - b_k$.
 D'où $b_{k+1} = a_k + \frac{1}{2}b_k + c_k = \frac{1}{2}b_k + 1 - b_k = 1 - \frac{1}{2}b_k$.
6. En déduire, pour $k \geq 1$, l'expression de b_k en fonction de k puis celle de a_k et c_k en fonction de k .
 La suite (b_k) est une suite arithmético-géométrique. On résout $\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}$. Alors la suite v , définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $v_k = b_k - \alpha$, est géométrique de raison $(-\frac{1}{2})$ et de premier terme $v_0 = b_0 - \alpha = -\alpha$ d'où $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_k = (-\frac{1}{2})^k(-\alpha) + \alpha = \frac{2}{3}\left(1 - (-\frac{1}{2})^k\right)$.
 Puis on sait que pour tout $k \geq 1$, $a_{k+1} = c_{k+1}$ et que de plus $a_1 = c_1 (= 0)$ donc finalement, pour tout $k \geq 1$, $a_k = c_k = \frac{1}{2}(1 - b_k) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$. (ou passer par $a_k = \frac{1}{4}b_{k-1} \dots$)

Problème 1.

Les deux parties sont très largement indépendantes.

Partie I

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = x \ln(x)$.

- Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer g' .
 g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \ln(x) + 1$.
- Dresser le tableau de variations complet de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
 $\ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$. D'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ et par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Ainsi le tableau de variation de g est :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
g	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

- Montrer que g réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ sur un intervalle J à déterminer.
 g est strictement croissante et continue sur $\left[e^{-1}, +\infty\right[$ donc par le théorème de la bijection réalise une bijection de $\left[e^{-1}, +\infty\right[$ sur $g\left(\left[e^{-1}, +\infty\right[\right) = \left[-e^{-1}, +\infty\right[$.
- On note $g^{-1} : J \rightarrow \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ sa bijection réciproque.
 - Etudier la monotonie de g^{-1} .
 D'après le théorème de la bijection, g^{-1} est continue et strictement croissante de $\left[-e^{-1}, +\infty\right[$ sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.
 - Dresser le tableau de variations complet de g^{-1} .
 Par ce qui précède :

x	$-e^{-1}$	$+\infty$
g^{-1}	e^{-1}	$+\infty$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution x_n sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right]$, puis vérifier que $n \geq x_n \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $n \in [-e^{-1}, +\infty[$, donc d'après 3. et par définition de la bijection, il existe une unique solution $x_n \in [e^{-1}, +\infty[$ à l'équation $g(x) = n$. De plus $g(1) = 0 \leq n \leq g(n) = n \ln(n)$ donc par stricte croissance de g , $1 \leq x_n \leq n$.

6. Ecrire une fonction Python qui au réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe le réel $g(x)$.

```
1 def g(x):
2     return x*np.log(x)
```

7. On suppose la fonction g bien définie. Compléter le programme suivant pour qu'étant donné n et eps renvoie une approximation de x_n à eps près à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
1 def approx(n,eps):
2     a=1
3     b=n
4     while b-a>eps :
5         m=(b+a)/2
6         if (g(a)-n)*(g(m)-n)>0:
7             a=m
8         else :
9             b=m
10    return m
```

8. (a) Montrer que la suite (x_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $g(x_n) = n \Leftrightarrow x_n = g^{-1}(n)$. Or $n \leq n+1$ donc par croissance de g^{-1} , $g^{-1}(n) \leq g^{-1}(n+1)$ d'où $x_n \leq x_{n+1}$. (ou rédiger avec g .)

- (b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

D'après le tableau de variations de g^{-1} , $\lim_{x \rightarrow +\infty} g^{-1}(x) = +\infty$ d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-1}(n) = +\infty$$

- (c) En revenant à la définition de x_n , montrer que $\ln(x_n) + \ln(\ln(x_n)) = \ln(n)$.

On sait $g(x_n) = n$ càd $x_n \ln(x_n) = n$. Donc en appliquant $\ln$: $\ln(x_n \ln(x_n)) = \ln(n)$ soit $\ln(x_n) + \ln(\ln(x_n)) = \ln(n)$.

- (d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = 1$.

Par ce qui précède, $\ln(x_n) + \ln(\ln(x_n)) = \ln(n)$. Ainsi

$$1 + \frac{\ln(\ln(x_n))}{\ln(x_n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(x_n))}$$

Or par les croissances comparées $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$, ainsi avec $y = x_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(x_n))}{\ln(x_n)} = 0$.

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(x_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(\ln(x_n))}{\ln(x_n)} = 1$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = 1.$

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit $f_n(x) = \begin{cases} xe^{-n/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$

9. Montrer que f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

Sur $]0, +\infty[$: f_n est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions usuelles continues.

En 0 : $f_n(0) = 0$ et pour $x > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-n/x} = 0 = f_n(0)$ par les croissances comparées car $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{n}{x} = -\infty$.

10. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

Sur $]0, +\infty[$: f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$. Et

$$f'_n(x) = \left(1 + \frac{nx}{x^2}\right) e^{-1/x}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-n/x} + \frac{n}{x} e^{-n/x} = 0$ par les croissances comparées. Donc comme f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'_n(x) = 0 \in \mathbb{R}$ par le théorème de prolongement de la dérivée, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f'_n(0) = 0$.

11. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $f'_n(x) = e^{-n/x} + x \left(\frac{n}{x^2}\right) e^{-n/x} > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

En $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-n/x} = e^0 = 1$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. D'où le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
f_n	0	$+\infty$

12. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est x_n où x_n est le réel défini Partie I

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = 1 \Leftrightarrow xe^{-n/x} = 1 \Leftrightarrow x = e^{n/x} \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{n}{x} \Leftrightarrow \ln(x)x = n \Leftrightarrow g(x) = n$. Or l'équation $g(x) = n$ n'admet aucune solution sur $]0, e^{-1}[$ (puisque g y est strictement négative) et a pour unique solution x_n sur $[e^{-1}, +\infty[$ d'où la conclusion.

Dorénavant, et jusqu'à la fin de l'exercice, on pose $n = 1$ et on note f la fonction f_1 définie ci-dessus.

11. (a) Dessiner l'allure de f sur $\mathbb{R}_+$, en précisant sa tangente en 0.

$f'(0) = 0$ d'après 10 . donc la tangente est horizontale en 0 .



- (b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

Par croissance de f sur $[0, 1]$, $0 \leq x \leq f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq e^{-1} \leq 1$.

- (c) Montrer que f' est continue sur $[0, 1]$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ donc f' est continue sur $[0, 1]$

- (d) Calculer pour tout $x \in]0, 1[$, $f''(x)$.

Pour tout $x \in]0, 1[$, $f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-1/x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = \frac{1}{x^3} e^{-1/x} > 0$.

- (e) Montrer alors que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{e}$.

De 11c et 11d on obtient : f' est croissante sur $[0, 1]$ et comme $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$, on a

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{e}.$$

D'où $|f'(x)| \leq \frac{2}{e}$.

12. On définit alors la suite v par : $v_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$

- (a) i. Ecrire une fonction **Python** qui au réel $x \in \mathbb{R}^+$ associe le réel $f(x)$.

```

1 def f(x):
2     if x==0:
3         return 0
4     else :
5         return x*np.exp(-1/x)

```

- ii. Ecrire une fonction **Python** d'en-tête **def v(n,a)** : qui renvoie la valeur de v_n lorsque $v_0 = a$.

```

1 def v(n,a):
2     res=a
3     for k in range(1,n+1):
4         res=f(res)
5     return res

```

- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, 1]$.

Réurrence rapide : $v_0 \in [0, 1]$, et si on a $v_n \in [0, 1]$ pour un certain n , alors d'après 12.(b) $v_{n+1} = f(v_n) \in [0, 1]$. Conclure.

- (c) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_{n+1}| \leq \frac{2}{e} |v_n|$.
 f est continue et dérivable sur $[0, 1]$, et d'après (e), on peut appliquer l'IAF à f sur $[0, 1]$ aux points v_n et 0. On obtient : $|f(v_n) - f(0)| \leq \frac{2}{e} |v_n - 0|$ d'où $|v_{n+1}| \leq \frac{2}{e} |v_n|$.

- (d) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$.

Par récurrence : pour $n = 0$, $\left(\frac{2}{e}\right)^0 = 1$ et $v_0 \in [0, 1]$ donc $|v_0| \leq 1$.

Puis supposons que pour un certain n , $|v_n| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$. Alors d'après (c), $|v_{n+1}| \leq \frac{2}{e} |v_n|$ d'où par HR, $|v_{n+1}| \leq \frac{2}{e} \left(\frac{2}{e}\right)^n = \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}$. Conclure.

- (e) Qu'en déduit-on ?

Comme $\left|\frac{2}{e}\right| < 1$, on en déduit $\left(\frac{2}{e}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et par théorème d'encadrement, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. La suite v converge vers 0.