
Concours blanc 1 du 13/01/26 Sujet 2
Durée 4h, l'énoncé comporte **4 pages**

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1.

Soit $b \in \mathbb{N}^*$. On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, \dots, S_{i-1}, S_i, \dots$ tels que :

- le sac S_1 contient $b + 1$ billes jaunes et b vertes ;
- pour tout $i \geq 2$, le sac S_i contient b billes jaunes et b vertes.

On effectue des tirages successifs d'une bille de ces sacs de la manière suivante :

- le premier tirage consiste à extraire au hasard une bille du sac S_1 ;
- pour tout $i \geq 2$, on place dans le sac S_i la bille tirée du sac S_{i-1} , puis le i -ème tirage consiste à extraire au hasard une bille du sac S_i .

Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'évènement : "la bille tirée dans S_n est verte" et on note $a_n = P(A_n)$ sa probabilité.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité de l'évènement E_n "ne tirer que des boules jaunes au cours des n premiers tirages" ?

Notons $J_n = \overline{A_n}$ c'est-à-dire : la boule tirée au n -ième tirage est jaune

$E_n = J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_n$. Donc par la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned} P(E_n) &= P(J_1)P_{J_1}(J_2) \dots P_{J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_{n-1}}(J_n) \\ &= \frac{b+1}{2b+1} \times \frac{b+1}{2b+1} \times \dots \times \frac{b+1}{2b+1} = \left(\frac{b+1}{2b+1} \right)^n \end{aligned}$$

Car si on tire une boule jaune a un tirage alors au tirage suivant il y aura $b + 1$ boules jaunes et b boules vertes.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité de l'évènement F_n "tirer une boule verte au n -ième tirage et ce pour la première fois" ?

On a $F_n = J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_{n-1} \cap A_n$ ou encore $F_n = E_{n-1} \cap A_n$. Donc, toujours par la formule des probabilités composées.

$$P(F_n) = P(E_{n-1})P_{E_{n-1}}(A_n) = \left(\frac{b+1}{2b} \right)^{n-1} \times \frac{b}{2b+1}$$

car il y aura dans l'urne S_n , $b + 1$ boules jaunes et b boules vertes.

3. Montrer que $a_n = \frac{1}{2b+1}a_{n-1} + \frac{b}{2b+1}$ pour tout $n \geq 2$.

Soit $n \geq 2$ alors (A_{n-1}, J_{n-1}) forme un système complet d'évènement. Donc par la formule des probabilités totales,

$$a_n = P(A_n) = P(A_{n-1})P_{A_{n-1}}(A_n) + P(J_{n-1})P_{J_{n-1}}(A_n)$$

Or

$$P(J_{n-1}) = 1 - P(A_{n-1}) = 1 - a_{n-1}$$

$$P_{A_{n-1}}(A_n) = \frac{b+1}{2b}$$

car si l'on tire une boule verte au $n - 1$ -ième tirage, il y aura $b + 1$ vertes et b jaunes dans S_n pour faire le tirage. Et

$$P_{J_{n-1}}(A_n) = \frac{b}{2b+1}$$

car si l'on tire une boule jaune au $n - 1$ -ième tirage il y aura b vertes et $b + 1$ jaunes dans S_n pour le tirage. Ainsi :

$$a_n = a_{n-1} \frac{b+1}{2b+1} + (1 - a_{n-1}) \frac{b}{2b+1} = \frac{1}{2b+1}a_{n-1} + \frac{b}{2b+1}$$

4. (a) Sans exprimer a_n en fonction de n , montrer que la suite (a_n) est majorée par $\frac{1}{2}$, puis montrer qu'elle est croissante.

Commençons par montrer qu'elle est majorée par $\frac{1}{2}$. Soit pour tout $n \geq 1$ la propriété : $\mathcal{P}(n) : "a_n \leq \frac{1}{2}"$.

- Initialisation : $a_1 = P(A_1) = \frac{b}{2b+1} \leq \frac{1}{2}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.
- Hérédité : Soit $n \geq 1$ supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. alors $a_n \leq \frac{1}{2}$ donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2b+1}a_n + \frac{b}{2b+1} \\ &\leq \frac{1}{2b+1} \frac{1}{2} + \frac{b}{2b+1} && \text{par l'hypothèse de récurrence} \\ &\leq \frac{1+2b}{2 \times (2b+1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}$, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

- Conclusion : pour tout $n \geq 1$, $a_n \leq \frac{1}{2}$.

Montrons maintenant que (a_n) est croissante. Soit $n \geq 2$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \frac{1}{2b+1}a_{n-1} + \frac{b}{2b+1} - a_{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2b+1} - 1 \right) a_{n-1} + \frac{b}{2b+1} \\ &= \frac{-2b}{2b+1}a_{n-1} + \frac{b}{2b+1} \\ &= \frac{b(-2a_{n-1} + 1)}{2b+1} \end{aligned}$$

Or $a_{n-1} \leq \frac{1}{2}$, $b \geq 0$ et $2b+1 \geq 0$, donc $a_n - a_{n-1} \geq 0$. La suite (a_n) est donc croissante.

- (b) En déduire que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.

La suite (a_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ donc par le théorème de la limite monotone, (a_n) converge.

Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n-1} = \ell$. Donc en appliquant la limite à la relation 3, on a :

$$\ell = \frac{1}{2b+1}\ell + \frac{b}{2b+1}$$

Soit

$$\ell \left(1 - \frac{1}{2b+1} \right) = \frac{b}{2b+1}$$

Et donc

$$\ell = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

- (c) Exprimer a_n en fonction de n , pour tout $n \geq 1$.

La suite (a_n) est une suite arithmético-géométrique. On commence par résoudre :

$$x = \frac{1}{2b+1}x + \frac{b}{2b+1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

On pose pour tout $n \geq 1$, $u_n = a_n - \frac{1}{2}$.

Montrons que (u_n) est alors géométrique. En effet, soit $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} u_n &= a_n - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2b+1}a_{n-1} + \frac{b}{2b+1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2b+1}a_{n-1} + \frac{2b - (2b+1)}{2(2b+1)} \\ &= \frac{1}{2b+1}a_{n-1} - \frac{1}{2(2b+1)} \\ &= \frac{1}{2b+1} \left(a_{n-1} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2b+1} u_{n-1} \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2b+1}$ et de premier terme

$$u_1 = a_1 - \frac{1}{2} = \frac{b}{2b+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2(2b+1)}$$

Donc $u_n = -\left(\frac{1}{2b+1}\right)^{n-1} \frac{1}{2(2b+1)}$ et ainsi

$$a_n = u_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2b+1}\right)^{n-1} \frac{1}{2(2b+1)}$$

Exercice 2.

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $T_0 = 1$, $T_1(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev

Partie 1

1. Calculer T_2 , T_3 , T_4 et T_5 .

- $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x \times x - 1 = 2x^2 - 1$
- $T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$
- $T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
- $T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

2. (a) Formuler une hypothèse sur le degré et le coefficient dominant de T_n pour tout $n \geq 1$ et démontrer cette hypothèse.

Soit $n \geq 1$, il semblerait que $\deg T_n = n$ et que son coefficient dominant soit 2^{n-1} . Montrons ce résultat par récurrence double. On pose pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$: " T_n est de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1} ".

- Initialisation :

- T_1 est de degré 1 et son coefficient dominant est $1 = 2^0 = 2^{1-1}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.
- T_2 est de degré 2 et son coefficient dominant est $2 = 2^{2-1}$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée.
- Hérédité : soit $n \geq 1$, supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vérifiées. Alors montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vérifiée. On a $T_{n+2} = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$, donc $\deg(T_{n+2}) = \deg(2xT_{n+1} - T_n)$. Or $\deg(2xT_{n+1}) = \deg(T_{n+1}) + 1 = n + 2$ et $\deg(T_n) = n$. Comme $\deg(2xT_{n+1}) \neq \deg(T_n)$, on a

$$\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2xT_{n+1}), \deg(T_n)) = n + 2$$

De plus le terme de degré $n + 2$ vient donc de $2xT_{n+1}$ donc le terme de plus haut degré de $T_{n+2} = 2 \times 2^{n+1-1} = 2^{n+2-1}$.

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

- Donc pour tout $n \geq 1$ $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(b) Montrer que La fonction T_n a la même parité que n .

Soit $k \geq 0$, on pose $\mathcal{H}(k)$: " T_{2k} est paire et T_{2k+1} est impaire".

- Initialisation : T_0 et T_1 sont définies sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $T_0(-x) = 1 = T_0(x)$ et $T_1(-x) = -x = -T_1(x)$. T_0 est paire et T_1 est impaire. $\mathcal{H}(0)$ est vérifiée.
- Supposons $\mathcal{H}(k)$ vraie. Alors T_{2k} est paire et T_{2k+1} est impaire. On a alors T_{2k+2} et T_{2k+3} qui sont définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} T_{2k+2}(-x) &= -2xT_{2k+1}(-x) - T_{2k}(-x) \\ &= -2x(-T_{2k+1}(x)) - T_{2k}(x) && \text{par HR} \\ &= 2xT_{2k+1}(x) - T_{2k}(x) \\ &= T_{2k+2}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{2k+3}(-x) &= -2xT_{2k+2}(-x) - T_{2k+1}(-x) \\ &= -2xT_{2k+2}(x) - (-T_{2k+1}(x)) && \text{par HR} \\ &= -(2xT_{2k+2}(x) - T_{2k+1}(x)) \\ &= -T_{2k+3}(x) \end{aligned}$$

3. Montrer que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \leq n \Rightarrow 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$

Soit $n \geq 0$. Montrons le résultat par récurrence sur m . Soit pour tout $m \leq n$ la propriété $\mathcal{P}(m)$: $2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$. On peut supposer $n \geq 1$, le cas $n = 0$ étant évident.

- Initialisation :
 - Si $m = 0$ on a d'une part $2T_n T_0 = 2T_n$ et d'autre part $T_{n+0} + T_{n-0} = T_n + T_n = 2T_n$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - Si $m = 1$, on a d'une part $2T_n T_1 = 2xT_n$, d'autre part $T_{n+1} = 2xT_n - T_n$ par la relation de départ en $n - 1$ donc $T_{n+1} + T_{n-1} = 2xT_n$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $m \geq 0$ supposons $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ vraie. Alors soit $n = m + 1$ et c'est terminé soit $n \geq m + 2$ et montrons que $\mathcal{P}(m+2)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned} 2T_n T_{m+2} &= 2T_n(2xT_{m+1} - T_m) \\ &= 2x2T_n T_{m+1} - 2T_n T_m \\ &= 2x(T_{n+m+1} + T_{n-(m+1)}) - (T_{n+m} + T_{n-m}) && \text{par HR} \\ &= 2xT_{n+m+1} + 2xT_{n-m-1} - T_{n+m} - T_{n-m} \\ &= 2xT_{n+m} - T_{n+m} + 2xT_{n-m-1} - T_{n-m} \\ &= T_{n+m+2} + T_{n-m-2} \end{aligned}$$

Car

$$T_{n+m+2} = 2xT_{n+m+1} - T_{n+m} \text{ et } T_{n-m} = 2xT_{n-m-1} - T_{n-m-2}$$

Donc $\mathcal{P}(m+2)$ est vraie.

- Donc pour tout $n \geq m \geq 0$, $2T_nT_m = T_{n+m} + T_{n-m}$

Partie 2

4. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

$$\begin{aligned}\cos(a+b) + \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ &= 2\cos(a)\cos(b)\end{aligned}$$

Donc

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

5. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Réurrence : $\cos(0\theta) = 1 = T_0(\cos \theta)$, $\cos(1\theta) = \cos(\theta) = T_1(\cos \theta)$ et si $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(\cos \theta) = \cos((n+1)\theta)$. Alors

$$\begin{aligned}T_{n+2}(\cos \theta) &= 2\cos \theta T_{n+1}(\cos \theta) - T_n(\cos \theta) \\ &= 2\cos \theta \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= (\cos(\theta + (n+1)\theta) + \cos((n+1)\theta - \theta) - \cos(n\theta)) \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta)\end{aligned}$$

Donc le résultat est vrai au rang $n+2$.

6. En déduire les valeurs de $T_n(1)$ et $T_n(0)$ en fonction des valeurs de n .

Alors $T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n \times 0) = \cos(0) = 1$

Et $T_n(0) = T_n(\cos(\pi/2)) = \cos(n\pi/2)$. Donc

$$T_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 1 & \text{si } n = 4k \\ -1 & \text{si } n = 4k + 2 \end{cases}$$

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$. Combien y en a-t-il ?

Soit α une racine de T_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$ alors, α peut s'écrire $\cos(\theta)$ avec $\theta \in [0, \pi]$. Donc on a

$$T_n(\alpha) = 0 \Leftrightarrow T_n(\cos(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = 0$$

Donc $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Soit

$$\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

Or on veut $\theta \in [0, \pi]$ donc k ne peut pas avoir n'importe quelle valeur, on a donc :

$$\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

Et donc les racines dans $[-1, 1]$ sont :

$$\mathcal{S} = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Il y en a donc n .

8. En déduire une factorisation de T_n . On a trouvé n racines de T_n qui est de degré n donc on a trouvé toutes les racines de T_n . De plus son coefficient dominant est 2^{n-1} . Donc la factorisation de T_n est :

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - \cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right)$$

Exercice 3.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} + u_{n+1} - 3u_n$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

$$\text{D'une part : } X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 3u_{n+2} + u_{n+1} - 3u_n \end{pmatrix}$$

$$\text{D'autre part } AX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -3u_n + u_{n+1} + 3u_{n+2} \end{pmatrix}$$

Donc $AX_n = X_{n+1}$.

2. Déterminer U , V et W de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $AU = U$, $AV = -V$ et $AW = 3W$.

On cherche $U = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $AU = U$ soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ -3 + x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

On résout donc le système $\begin{cases} x = 1 \\ y = x \\ -3 + x + 3y = y \end{cases}$. Les deux premières équations nous donnent

$x = y = 1$ et on remarque que cela fonctionne également pour la 3-eme équation. On a donc

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par le même procédé on trouve comme système pour V : $\begin{cases} x = -1 \\ y = -x \\ -3 + x + 3y = -y \end{cases}$, on trouve

$$\text{alors } V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et pour } W \begin{cases} x = 3 \\ y = 3x \\ -3 + x + 3y = 3y \end{cases} \quad \text{et } W = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

3. Considérons P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont définies par les matrices colonnes U , V et W (dans cet ordre). Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puis calculer $D = P^{-1}AP$.

On a donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. Alors

$$P \times \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc P a un inverse à droite $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc P est inversible d'inverse $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{De plus } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Exprimer sans justifier X_n en fonction de X_0 , $P^{-1}P$ et D^n .

On a $X_{n+1} = AX_n$, donc $X_n = A^n X_0$. De plus $D = P^{-1}AP$, donc $A = PDP^{-1}$. Et alors $A^n = PD^nP^{-1}$.

Ainsi $X_n = PD^nP^{-1}X_0$

5. En déduire u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

On a

$$\begin{aligned} X_n &= PD^nP^{-1}X_0 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & (-1)^n & 3^n \\ 1 & (-1)^{n+1} & 3^{n+1} \\ 1 & (-1)^n & 3^{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 + 9 \times (-1)^n + 3^n \\ -2 + 9 \times (-1)^{n+1} + 3^{n+1} \\ -2 + 9 \times (-1)^n + 3^{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi u_n étant la première coordonnée de X_n , on a donc $u_n = \frac{1}{8} (-2 + 9 \times (-1)^n + 3^n)$

Exercice 4.

Dans tout l'exercice, on pose

$$I_0 = \int_1^e t dt \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_1^e t(\ln(t))^n dt.$$

1. (a) Calculer I_0 .

On calcule :

$$I_0 = \int_1^e t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

- (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $I_n \geq 0$.

Soit $n \geq 1$, pour tout $t \in [1, e]$, $\ln(t) \geq 0$, donc $t \in [1, e]$, $t(\ln(t))^n \geq 0$.

Par positivité de l'intégrale, on a donc $I_n \geq 0$.

De plus, $I_0 \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.

- (c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

Soit $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_1^e (t(\ln(t))^{n+1} - t(\ln(t))^n) dt \\ &= \int_1^e \underbrace{t}_{\geq 0} \underbrace{\ln(t)^n}_{\geq 0} \underbrace{(\ln(t) - 1)}_{\leq 0} dt \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

La suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle est donc convergente.

2. Pour tout entier naturel n , soit

$$\begin{aligned} f_n : [1, e] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto (\ln(t))^{n+1}. \end{aligned}$$

- (a) Justifier la dérivabilité de f_n et calculer sa dérivée.

La fonction f_n est dérivable comme composée des fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto t^{n+1}$.

On a alors $f'_n(t) = (n+1) \frac{1}{t} (\ln(t))^n$.

- (b) En utilisant une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n la relation

$$2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2. \quad (1)$$

Soit $n \geq 0$, on a :

$$I_{n+1} = \int_1^e t(\ln(t))^{n+1} dt = \int_1^e t f_n(t) dt.$$

On pose

$$\begin{aligned} u &= f_n(t) & u' &= f'_n(t) \\ v' &= t & v &= \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Les fonction u et v sont dérivables, de dérivées continues sur $[1, e]$, on peut donc utiliser une intégration par parties.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e t f_n(t) dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} f_n(t) \right]_1^e - \int_1^e (n+1) \frac{1}{t} (\ln(t))^n \frac{t^2}{2} dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} f_n(t) \right]_1^e - \frac{n+1}{2} \int_1^e t (\ln(t))^n dt \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n \end{aligned}$$

On en déduit $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$.

- (c) En déduire la valeur de I_1 .

On applique la relation (1) en $n = 0$.

$$\begin{aligned} 2I_1 + I_0 &= e^2 \iff I_1 = \frac{e^2 - I_0}{2} \\ &\iff I_1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} \\ &\iff I_1 = \frac{1}{4}(e^2 + 1) \end{aligned}$$

(d) Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie la valeur de I_n .

```

1 def approx(n,eps):
2     I=(np.exp(2)-1)/2
3     for k in range(1,n+1):
4         I=np.exp(2)/2-(k/2)*I
5     return I

```

(e) En utilisant la relation (1) et la décroissance de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$, établir pour tout entier naturel n l'encadrement suivant :

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

Comme $I_{n+1} \leq I_n$, on a

$$\begin{aligned}
 2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2 &\implies 2I_n + (n+1)I_n \geq e^2 \\
 &\iff (n+3)I_n \geq e^2 \\
 &\iff I_n \geq \frac{e^2}{n+3}
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2 &\implies 2I_{n+1} + (n+1)I_{n+1} \leq e^2 \\
 &\iff (n+3)I_{n+1} \leq e^2 \\
 &\iff I_{n+1} \leq \frac{e^2}{n+3}
 \end{aligned}$$

Si on écrit cette relation au rang $n-1$, on trouve :

$$I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

Ainsi, on obtient l'encadrement :

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

(f) En déduire les limites respectives des deux suites $(I_n)_{n \geq 0}$ et $(nI_n)_{n \geq 0}$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{n+3} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{n+2} = 0$, donc par théorème d'encadrement, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

On multiplie l'encadrement trouvé en question (2e) par $n \geq 0$. On obtient :

$$\frac{ne^2}{n+3} \leq nI_n \leq \frac{ne^2}{n+2}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^2}{n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{1+\frac{3}{n}} = e^2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^2}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{1+\frac{2}{n}} = e^2$, donc par théorème d'encadrement, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = e^2.$$

3. (a) Établir, pour tout entier naturel n , l'encadrement :

$$\frac{(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)} \leq 2I_{n+1} + I_n \leq \frac{(3n+7)e^2}{(n+2)(n+3)}.$$

On utilise les encadrements de la question (2e) aux rangs n et $n+1$:

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2} \quad \text{et} \quad \frac{e^2}{n+4} \leq I_{n+1} \leq \frac{e^2}{n+3}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} 2I_{n+1} + I_n &\leq \frac{2e^2}{n+3} + \frac{e^2}{n+2} \\ &\leq \frac{e^2(2(n+2) + (n+3))}{(n+3)(n+2)} \\ &\leq \frac{e^2(3n+7)}{(n+3)(n+2)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2I_{n+1} + I_n &\geq \frac{2e^2}{n+4} + \frac{e^2}{n+3} \\ &\geq \frac{e^2(2(n+3) + (n+4))}{(n+3)(n+4)} \\ &\geq \frac{e^2(3n+10)}{(n+3)(n+2)} \end{aligned}$$

d'où l'encadrement attendu.

(b) Pour tout entier naturel n , on pose

$$w_n = n(e^2 - nI_n).$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3e^2$.

Par la relation (1), on a :

$$2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2 \iff 2I_{n+1} + I_n = e^2 - nI_n.$$

On en déduit

$$w_n = n(e^2 - nI_n) = n(2I_{n+1} + I_n),$$

d'où l'encadrement suivant :

$$\frac{n(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)} \leq nw_n \leq \frac{n(3n+7)e^2}{(n+2)(n+3)}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3 + \frac{10}{n})e^2}{(1 + \frac{3}{n})(1 + \frac{4}{n})} = 3e^2$ et de même

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(3n+7)e^2}{(n+3)(n+2)} = 3e^2.$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nw_n = 3e^2.$$

4. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n , l'égalité :

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \left(e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right).$$

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété $\ll I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \left(e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right) \gg$. Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— *Initialisation* : $n = 0$

On sait par la question (1a) que $I_0 = \frac{e^2 - 1}{2}$.

D'autre part,

$$\frac{(-1)^0 0!}{2^{0+1}} \left(e^2 \sum_{k=0}^0 \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right) = \frac{1}{2}(e^2 - 1) = I_0,$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

— *Hérédité* : Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par la relation (1), on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \left(e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right) && \text{par HR} \\ &= \frac{e^2}{2} + \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{2^{n+2}} \left(e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{2^{n+2}} \left(e^2 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right) \end{aligned}$$

car le terme correspondant à $k = n+1$ dans la somme vaut

$$e^2 \frac{(-2)^{n+1} (n+1)! (-1)^{n+1}}{(n+1)! 2^{n+2}} = -\frac{e^2}{2},$$

donc vient annuler le $\frac{e^2}{2}$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— *Conclusion* : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \left(e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right).$$

5. (a) Définir un programme **Python** nommé **facto** prenant **n** et renvoyant $n!$

```
1 def facto(n):
2     P=1
3     for k in range(1,n+1):
4         P=P*k
5     return P
```

- (b) On suppose la fonction **facto** définie au-dessus correctement programmée. Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie la valeur de I_n .

```

1 def I(n):
2     S=0
3     for k in range(1,n+1):
4         S=S+(-2)**k/facto(k)
5     I=(-1)**n*facto(n)/(2**(n+1))*(np.exp(2)*S-1)
6     return I

```

(c) Bonus : A votre avis quel programme entre celui de la question 2d et celui de la question 5b demande le moins de calcul à l'ordinateur ? Justifier.

- Le programme 2d va demander 3 calcul pour chaque k : le calcul de $e^2/2$, le calcul de $k/2 \times I$ et la soustraction entre les 2. Donc en tout environ $3n$ calculs.
- Le programme 5b pour chaque k va devoir calculer $k!$ ce qui va lui demander k multiplication puis faire $2^k/k!$ donc un calcul de plus. Donc pour calculer la somme il lui faudra

$$\sum_{k=0}^n (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ calculs.}$$

Plus 3-4 calculs à la fin. Mais donc environ (pour n grand) $n^2/2$ calcul

Le programme 5b demandera donc beaucoup plus de calcul que 2d.

Exercice 5.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$$

1. (a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x) - x$$

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions usuelles qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -1 - \sin(x) \leq 0$$

Par encadrement,

$$-x - 1 \leq f(x) \leq -x + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Le tableau de variations est donc le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$	$-\infty$

(b) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\alpha) = \alpha$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante sur cet intervalle donc par théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$, donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$ donc tel que $\cos(\alpha) = \alpha$

(c) Justifier que $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$

On a $f(0) = \cos(0) - 0 = 1 > 0$ et $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} < 0$ (car $\frac{\pi}{3} > 1$), donc $0 \in [\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}, 1] = f([0, \frac{\pi}{3}])$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{3}]$. Par unicité de la solution sur $\mathbb{R}$, $\alpha \in [0, \pi/3]$.

2. Démontrer par récurrence que $u_n \in [0, \frac{\pi}{3}]$ pour tout entier naturel n .

— *Initialisation* :

Si $n = 0$ la formule s'écrit $1 = u_0 \in [0, \frac{\pi}{3}]$, ce qui est vrai.

— *Hérédité* :

Soit $n \geq 0$ tel que $0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{3}$, alors par décroissance de la fonction cos sur $[0, \frac{\pi}{3}]$:

$$1 \geq \cos(u_n) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \leq \frac{\pi}{3}$$

ce qui est le résultat au rang $n + 1$.

— *Conclusion* : On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{3}$.

3. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha|.$$

La fonction cos est continue sur $[0, \pi/3]$ dérivable sur $[0, \pi/3]$ de dérivée sin, et $|\sin(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour tout $x \in]0, \pi/3[$. Donc par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x, y \in [0, \pi/3]$,

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |x - y|$$

En particulier comme u_n et $\alpha \in [0, \pi/3]$,

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\cos(u_n) - \cos(\alpha)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha|$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n.$$

Ce résultat se montre par récurrence :

— *Initialisation* : Puisque $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$, on a

$$|1 - \alpha| \leq \max \left(1, \frac{\pi}{3} - 1 \right) = 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^0$$

ce qui est le résultat au rang 0.

— *Hérédité* : Soit $n \geq 0$ tel que :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$$

Par le résultat précédent on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1}$$

ce qui est la formule au rang $n + 1$.

— *Conclusion* : On a démontré que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$.

4. Que peut-on dire de la limite de la suite (u_n) ?

On en déduit, par le théorème d'encadrement, et parce que $(\frac{\sqrt{3}}{2})^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

5. Compléter le programme suivant pour qu'étant donné **eps** il renvoie une approximation à **eps** près de α .

```
1 def approx(eps):  
2     u=1  
3     n=0  
4     while (np.sqrt(3)/2)**n>eps :  
5         n=n+1  
6         u=np.cos(u)  
7     return u
```