
Concours blanc 1 du 13/01/26 Sujet 1
Durée 4h, l'énoncé comporte **4 pages**

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1.

1. Soit P un polynôme quelconque de degré $n \in \mathbb{N}$.
Justifier que le degré du polynôme $x \mapsto P(x^2)$ est $2n$. On pourra commencer par écrire le polynôme P .

On considère E l'ensemble des polynômes à coefficients réels vérifiant la relation :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, P(x^2) = x^2(x^2 + 1)P(x) \quad (*)$$

2. Le polynôme nul est-il solution de $(*)$? Et le polynôme $x \mapsto x^3 + x$?
3. Analyse du problème : Soit P un polynôme non nul de E , donc vérifiant $(*)$.
 - (a) En posant n le degré de P , montrer que $n = 4$.
 - (b) Montrer que $0, 1, -1$ sont racines de P .
 - (c) En dérivant $(*)$ (*attention à la dérivée de $x \mapsto P(x^2)$*), montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$2P'(x^2) = 2(x^2 + 1)P(x) + 2x^2P(x) + x(x^2 + 1)P'(x)$$

- (d) Montrer alors que 0 est racine de P' . En déduire que 0 est racine au moins double de P .
 - (e) En déduire qu'il existe un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2(x - 1)(x + 1)$
4. Synthèse : déterminer tous les polynômes de l'ensemble E .

Exercice 2.

Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt.$$

On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2 .
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
(b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On suppose déjà démontré pour tout $n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Donner la limite de la suite (u_n) .
4. Calculer

$$\int_0^1 (1 - t)^n dt,$$

puis montrer que $u_n \geq \frac{1}{n+1}$.

5. (a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n , on a :

$$(2n + 3)u_{n+1} = (2n + 2)u_n$$

- (b) Compléter le script **Python** ci-dessous pour qu'il calcule et affiche la valeur de u_n pour une valeur n entrée par l'utilisateur.

```
1 def suiteu(n):  
2     u=.....  
3     for k in range(.....):  
4         u=.....  
5     return u
```

Exercice 3.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} + u_{n+1} - 3u_n$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Déterminer U , V et W de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $AU = U$, $AV = -V$ et $AW = 3W$.
3. Considérons P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont définies par les matrices colonnes U , V et W (dans cet ordre). Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Puis calculer $D = P^{-1}AP$.
4. Exprimer sans justifier X_n en fonction de X_0 , P^{-1} , P et D^n .
5. En déduire u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.

On dispose d'une urne U contenant 2 boules noires, et d'une urne V contenant 2 boules blanches. On y effectue une suite d'épreuves comme suit : à chaque épreuve, on tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V , puis on les échange d'urne (la boule tirée de l'urne U est remise dans V et la boule tirée de l'urne V est remise dans U).

On introduit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les événements A_k (resp B_k , C_k) "à l'issue de la $k^{ième}$ épreuve, l'urne U contient 2 boules noires (resp. 1 noire, resp 0 noires)" et on notera a_k , b_k , c_k leur probabilité respective. On convient de poser $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.

1. Déterminer a_1 , b_1 et c_1
2. Justifier que pour tout entier $k \geq 1$, (A_k, B_k, C_k) forme un système complet d'évènements.
3. Déterminer, en justifiant rapidement, les 9 probabilités conditionnelles (avec $k \geq 1$) : $P_{A_k}(A_{k+1})$, $P_{A_k}(B_{k+1})$, $P_{A_k}(C_{k+1})$, $P_{B_k}(A_{k+1})$, $P_{B_k}(B_{k+1})$, $P_{B_k}(C_{k+1})$, $P_{C_k}(A_{k+1})$, $P_{C_k}(B_{k+1})$, $P_{C_k}(C_{k+1})$.
4. Montrer que $b_{k+1} = a_k + \frac{1}{2}b_k + c_k$. Déterminer les relations de récurrences analogues pour a_{k+1} et c_{k+1}
5. Montrer alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_{k+1} = 1 - \frac{1}{2}b_k$.
6. En déduire, pour $k \geq 1$, l'expression de b_k en fonction de k puis celle de a_k et c_k en fonction de k .

Problème 1.

Les deux parties sont très largement indépendantes.

Partie I

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = x \ln(x)$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer g' .
2. Dresser le tableau de variations complet de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que g réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ sur un intervalle J à déterminer.
4. On note $g^{-1} : J \rightarrow \left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ sa bijection réciproque.

- (a) Etudier la monotonie de g^{-1} .
- (b) Dresser le tableau de variations complet de g^{-1} .
- 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution x_n sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right]$, puis vérifier que $n \geq x_n \geq 1$.
- 6. Ecrire une fonction **Python** qui au réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe le réel $g(x)$.
- 7. On suppose la fonction **g** bien définie. Compléter le programme suivant pour qu'étant donné **n** et **eps** renvoie une approximation de x_n à **eps** près à l'aide de la méthode par dichotomie.

```

1 def approx(n,eps):
2     a=1
3     b=n
4     while .....>eps :
5         m=.....
6         if (g(a)-n)*(g(m)-n)>0:
7             .....=m
8         else :
9             .....=m
10    return m

```

- 8. (a) Montrer que la suite (x_n) est croissante.
- (b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$
- (c) En revenant à la définition de x_n , montrer que $\ln(x_n) + \ln(\ln(x_n)) = \ln(n)$.
- (d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = 1$.

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit $f_n(x) = \begin{cases} xe^{-n/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

- 9. Montrer que f_n est continue sur $[0, +\infty[$.
- 10. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
- 11. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $[0, +\infty[$.
- 12. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est x_n où x_n est le réel défini Partie I

Dorénavant, et jusqu'à la fin de l'exercice, on pose $n = 1$ et on note f la fonction f_1 définie ci-dessus.

- 11. (a) Dessiner l'allure de f sur $\mathbb{R}_+$, en précisant sa tangente en 0.
- (b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
- (c) Montrer que f' est continue sur $[0, 1]$.
- (d) Calculer pour tout $x \in]0, 1[$, $f''(x)$.
- (e) Montrer alors que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{e}$.
- 12. On définit alors la suite v par : $v_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$
 - (a) i. Ecrire une fonction **Python** qui au réel $x \in \mathbb{R}^+$ associe le réel $f(x)$.
 - ii. Ecrire une fonction **Python** d'en-tête **def v(n,a)** : qui renvoie la valeur de v_n lorsque $v_0 = a$.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, 1]$.
 - (c) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_{n+1}| \leq \frac{2}{e}|v_n|$.
 - (d) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$.
 - (e) Qu'en déduit-on ?

Concours blanc 1 du 13/01/26 Sujet 2
Durée 4h, l'énoncé comporte **4 pages**

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1.

Soit $b \in \mathbb{N}^*$. On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, \dots, S_{i-1}, S_i, \dots$ tels que :

- le sac S_1 contient $b + 1$ billes jaunes et b vertes ;
- pour tout $i \geq 2$, le sac S_i contient b billes jaunes et b vertes.

On effectue des tirages successifs d'une bille de ces sacs de la manière suivante :

- le premier tirage consiste à extraire au hasard une bille du sac S_1 ;
- pour tout $i \geq 2$, on place dans le sac S_i la bille tirée du sac S_{i-1} , puis le i -ème tirage consiste à extraire au hasard une bille du sac S_i .

Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'évènement : "la bille tirée dans S_n est verte" et on note $a_n = P(A_n)$ sa probabilité.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité de l'évènement E_n "ne tirer que des boules jaunes au cours des n premiers tirages" ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité de l'évènement F_n "tirer une boule verte au n -ième tirage et ce pour la première fois" ?
3. Montrer que $a_n = \frac{1}{2b+1}a_{n-1} + \frac{b}{2b+1}$ pour tout $n \geq 2$.
4. (a) Sans exprimer a_n en fonction de n , montrer que la suite (a_n) est majorée par $\frac{1}{2}$, puis montrer qu'elle est croissante.
 (b) En déduire que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.
 (c) Exprimer a_n en fonction de n , pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2.

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $T_0 = 1$, $T_1(x) = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev

Partie 1

1. Calculer T_2 , T_3 , T_4 et T_5 .
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
 (a) Formuler une hypothèse sur le degré et le coefficient dominant de T_n pour tout $n \geq 1$ et démontrer cette hypothèse.
 (b) La fonction T_n a la même parité que n
3. Montrer que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \leq n \Rightarrow 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$

Partie 2

4. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$
5. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.
6. En déduire les valeurs de $T_n(1)$ et $T_n(0)$ en fonction des valeurs de n .
7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$. Combien y en a-t-il ?
8. En déduire une factorisation de T_n .

Exercice 3.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} + u_{n+1} - 3u_n$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Déterminer U , V et W de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $AU = U$, $AV = -V$ et $AW = 3W$.
3. Considérons P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont définies par les matrices colonnes U , V et W (dans cet ordre). Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Puis calculer $D = P^{-1}AP$.
4. Exprimer sans justifier X_n en fonction de X_0 , $P^{-1}P$ et D^n .
5. En déduire u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.

Dans tout l'exercice, on pose

$$I_0 = \int_1^e t dt \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_1^e t(\ln(t))^n dt.$$

1. (a) Calculer I_0 .
(b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $I_n \geq 0$.
(c) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.
2. Pour tout entier naturel n , soit

$$\begin{aligned} f_n : [1, e] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto (\ln(t))^{n+1}. \end{aligned}$$

- (a) Justifier la dérivabilité de f_n et calculer sa dérivée.
- (b) En utilisant une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n la relation

$$2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2. \quad (1)$$

- (c) En déduire la valeur de I_1 .
- (d) Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie la valeur de I_n .

```

1 def approx(n,eps):
2     I=....
3     for k in range(.....):
4         I=.....
5     return I

```

- (e) En utilisant la relation (1) et la décroissance de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$, établir pour tout entier naturel n l'encadrement suivant :

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}.$$

- (f) En déduire les limites respectives des deux suites $(I_n)_{n \geq 0}$ et $(nI_n)_{n \geq 0}$.
3. (a) Établir, pour tout entier naturel n , l'encadrement :

$$\frac{(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)} \leq 2I_{n+1} + I_n \leq \frac{(3n+7)e^2}{(n+2)(n+3)}.$$

- (b) Pour tout entier naturel n , on pose

$$w_n = n(e^2 - nI_n).$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3e^2$.

4. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n , l'égalité :

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}} \left(e^2 \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} - 1 \right).$$

5. (a) Définir un programme **Python** nommé **facto** prenant **n** et renvoyant $n!$
 (b) On suppose la fonction **facto** définie au-dessus correctement programmée. Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie la valeur de I_n .

```

1 def I(n):
2     S=.....
3     for k in range(.....):
4         S=S+.....
5     I=.....*(np.exp(2)*S-1)
6     return I

```

- (c) Bonus : A votre avis quel programme entre celui de la question 2d et celui de la question 5b demande le moins de calcul à l'ordinateur ? Justifier.

Exercice 5.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$$

1. (a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x) - x$$

- (b) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\alpha) = \alpha$.

- (c) Justifier que $\alpha \in [0, \frac{\pi}{3}]$

2. Démontrer par récurrence que $u_n \in [0, \frac{\pi}{3}]$ pour tout entier naturel n .

3. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha|.$$

- (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n.$$

4. Que peut-on dire de la limite de la suite (u_n) ?

5. Compléter le programme suivant pour qu'étant donné **eps** il renvoie une approximation à **eps** près de α .

```

1 def approx(eps):
2     u=...
3     n=...
4     while .....>eps :
5         n=n+1
6         u=.....
7     return u

```