

Devoir surveillé 3 Sujet 1 du 12/12/2025
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 3 pages

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln(x)$ et la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = xe^x - 1$.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

- (b) Calculer la dérivée g' de g sur $[0, +\infty[$. En déduire le tableau de variations de g . On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.

Les polynômes et exponentielle sont dérivables sur $[0, +\infty[$ donc par produit et somme g est dérivable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. Sur $\mathbb{R}^+$, il est clair que $x+1 > 0$ et $e^x > 0$ donc $g'(x) > 0$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
g	-1	$+\infty$

- (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$.

g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[-1, +\infty[$ donc par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$. Or $0 \in [-1, +\infty[$, il existe donc un unique antécédent à 0 par la fonction g sur l'intervalle $[0, +\infty[$. C'est-à-dire, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0, +\infty[$.

Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$.

De plus $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = e^1 - 1 > 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in [0, 1]$ tel que $g(a) = 0$. Par unicité de α sur $[0, +\infty[$, nécessaire $\alpha = a$ et donc $\alpha \in [0, 1]$.

- (d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Comme g est croissante on a :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

2. (a) Ecrire un programme Python prenant en entrée x et renvoyant la valeur $f(x)$.

```
1 def f(x):
2     return np.exp(x)-np.log(x)
```

- (b) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Il est connu que $\lim_{0^+}(-\ln(x)) = +\infty$ et $\lim_{0^+}(e^x) = 1$ donc par somme $\lim_{0^+}(e^x - \ln(x)) = +\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, il y a une forme indéterminée de type $[+\infty - \infty]$, cependant par croissances comparées, $\lim_{+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{e^x}\right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{\ln(x)}{e^x}\right) = +\infty$.

- (c) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

Les fonctions exponentielle et logarithme sont dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc par différence f l'est aussi.

Pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \frac{g(x)}{x}$.

En déduire le tableau des variations de f sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que f' et g ont le même signe sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc le tableau de variations de f est :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

- (d) Justifier que le réel α vérifie $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

$g(\alpha) = \alpha e^\alpha - 1 = 0 \iff \alpha e^\alpha = 1 \iff e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$ car α non nul.

On peut composer par $\ln$ et on a $\alpha = \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\ln(\alpha)$.

On remplace dans $f(\alpha) = e^\alpha - \ln(\alpha)$ et on a $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

Exercice 2.

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

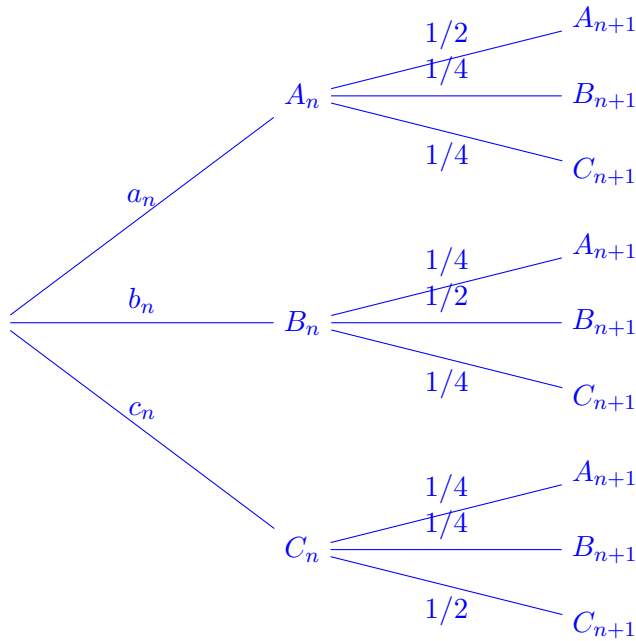
$$a_n = P(A_n), \quad b_n = P(B_n), \quad c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres a_n , b_n et c_n pour $n \in \{0, 1\}$

Au temps $n = 0$, on sait que le pion est en A donc $a_0 = P(A_0) = 1$, $b_0 = P(B_0) = 0$ et $c_0 = P(C_0) = 0$. Comme au temps 0 le pion est en A au temps 1 il a une chance sur deux d'être encore en A , une chance sur quatre d'être en B et une chance sur quatre d'être en C . Donc $a_1 = 1/2$, $b_1 = 1/4$ et $c_1 = 1/4$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n . Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1} .

Représentons le passage de l'étape n à l'étape $n + 1$ dans un arbre :



(A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

De même

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.

On pose $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} MV_n &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2a_n + b_n + c_n \\ a_n + 2b_n + c_n \\ a_n + b_n + 2c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{4} + \frac{c_n}{4} \\ \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2} + \frac{c_n}{4} \\ \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{4} + \frac{c_n}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = V_{n+1} \end{aligned}$$

4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$

En déduire une expression de a_n , b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $V_{n+1} = MV_n$. Donc par une récurrence rapide $V_n = M^n V_0$. (Si cela est vrai au rang n alors $V_{n+1} = MV_n = MM^n V_0 = M^{n+1} V_0$).

Donc $V_n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Soit

$$V_n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+2}{3 \times 4^n} \\ \frac{4^n-1}{3 \times 4^n} \\ \frac{4^n-1}{3 \times 4^n} \end{pmatrix}$$

Soit

$$a_n = \frac{4^n + 2}{3 \times 4^n}, \quad b_n = \frac{4^n - 1}{3 \times 4^n} \text{ et } c_n = \frac{4^n - 1}{3 \times 4^n}$$

5. Déterminer les limites respectives des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n + 2}{3 \times 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \times 4^n} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n - 1}{3 \times 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercice 3.

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$.

1. (a) Montrer que la dérivée de g vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité :

$$g'(x) = \frac{x-1}{x}.$$

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme différence de deux fonctions usuelles dérivables sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

(b) Calculer $g(1)$.

On calcule : $g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = \boxed{1}$.

(c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

• On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(x)) = \boxed{+\infty}$.

• On a pour tout $x > 0$: $g(x) = x - \ln(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$, or par croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \text{ donc on obtient : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}.$$

(d) Dresser le tableau des variations de g sur $]0; +\infty[$ en y faisant figurer les résultats obtenus aux questions (1b) et (1c).

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$	
x	0	+	+	
$x-1$		-	0	+
$g'(x)$		-	0	+
g		$+\infty$	1	$+\infty$

(e) Justifier que pour tout réel $x > 0$ on a : $g(x) > 0$.

Grâce au tableau de variations dressé ci-dessus, on voit que 1 est minimum de la fonction g .
Autrement dit, pour tout $x > 0$, $g(x) > 1$. En particulier, $g(x) > 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x - \ln(x)}.$$

(a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$f'(x) = \frac{1-x}{x(x - \ln(x))^2}.$$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de la fonction g qui est définie, continue, dérivable et non-nulle sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{\frac{x-1}{x}}{(x - \ln(x))^2} = -\frac{x-1}{x(x - \ln(x))^2} = \frac{1-x}{x(x - \ln(x))^2}.$$

(b) Dédurre de (1c) les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.

Par formule sur les limites d'inverses, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(c) Dresser le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$. On y fera figurer les limites obtenues à la question (2b) ainsi que $f(1)$.

Dans la question 2a, nous avons vu que $f'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$. Donc en se servant du signe de $g'(x)$ déterminé en question 1e, on obtient :

x	0	1	$+\infty$	
$-g'(x)$		+	0	-
$g(x)^2$		+		+
$f'(x)$		+	0	-
f			1	
		0		0

(avec $f(1) = \frac{1}{g(1)} = \frac{1}{1} = 1$).

3. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $]0; +\infty[$.

(a) On pose donc pour tout réel $x > 0$: $h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x}$. Pourquoi ?

Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{1}{x - \ln(x)} = x \\ &\iff x - \ln(x) = \frac{1}{x} \\ &\iff x - \ln(x) - \frac{1}{x} = 0 \\ &\iff h(x) = 0. \end{aligned}$$

On se ramène donc à résoudre l'équation $h(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$.

(b) Montrer que la dérivée de h vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité :

$$h'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}.$$

En déduire le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$.

La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles qui le sont et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}.$$

On remarque que $x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$. On étudie le signe de $x^2 - x + 1$. On calcule le discriminant associé : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc ce polynôme de degré 2 n'a pas de racine réelle. Il reste donc du signe de $a = 1 > 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 > 0$.

Par conséquent, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $h'(x) > 0$ donc h est une application strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

(c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Dresser le tableau des variations de h .

• Déterminons la limite de h en $+\infty$: pour $x > 0$, on a

$$h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x} = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) - \frac{1}{x}.$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

• Déterminons la limite de h en 0 : pour $x > 0$, on a

$$h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} (x \ln(x) + 1).$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty.$$

On en déduit le tableau de variations de h :

x	0	$+\infty$
$h'(x)$		+
h		$+\infty$  $-\infty$

- (d) Dédurre des questions précédentes que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

Déterminer la valeur de α .

h est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc par théorème de la bijection, h réalise une bijection de $]0; +\infty[$ dans $h(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$.

Or $0 \in h(]0; +\infty[)$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; +\infty[$. De plus, d'après la question (3a), on sait que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $h(x) = 0$, donc l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Par ailleurs $f(1) = \frac{1}{g(1)} = \frac{1}{1} = 1$. On en déduit que $\boxed{\alpha = 1}$.

Exercice 4.

On dispose de deux pièces : l'une est équilibrée (la probabilité d'obtenir Pile est $\frac{1}{2}$) et l'autre est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir Pile est $p \in [0, 1]$.

On effectue une suite de lancers de la façon suivante :

- Le premier lancer est effectué avec la pièce équilibrée.
- Ensuite, pour chacun des lancers suivants, on choisit ainsi la pièce :
 - si le résultat précédent est Pile, on conserve la même pièce pour le lancer suivant,
 - si le résultat précédent est Face, on prend l'autre pièce pour le lancer suivant.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

- T_n l'évènement "utiliser la pièce truquée pour le n -ième lancer",
- E_n l'évènement "utiliser la pièce équilibrée pour le n -ième lancer",
- P_n l'évènement "obtenir Pile au n -ième lancer",
- F_n l'évènement "obtenir Face au n -ième lancer".

Les deux premiers lancers

1. Déterminer la probabilité que le deuxième lancer se fasse avec la pièce équilibrée.

Le deuxième lancer se fera avec la pièce équilibrée si le premier lancer a donné Pile. Or le premier lancer se fait avec la pièce équilibrée. Donc la probabilité que le deuxième lancer se fasse avec la pièce équilibrée est $P(P_2) = 1/2$.

2. On a obtenu Pile au deuxième lancer. Calculer la probabilité que ce soit avec la pièce truquée.

On cherche $P_{P_2}(T_2)$. Par la formule de Bayes :

$$P_{P_2}(T_2) = \frac{P(T_2)}{P(P_2)} P_{T_2}(P_2)$$

Or $P_{T_2}(P_2) = p$, $P(T_2) = 1 - P(P_2) = \frac{1}{2}$. Il ne reste qu'à trouver $P(P_2)$. Or (T_2, E_2) est un système complet d'évènements, donc par la formule des probabilités totales :

$$P(P_2) = P(E_2)P_{E_2}(P_2) + P(T_2)P_{T_2}(P_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times p = \frac{1+2p}{4}$$

Finalement :

$$P_{P_2}(T_2) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+2p}{4}} \times p = \frac{2p}{1+2p}$$

3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un Pile lors des deux premiers lancers.

On peut le faire de deux façons. On pose l'évènement A : "On obtient au moins un Pile lors des deux premiers lancers. Alors :

- soit on remarque que $A \Leftrightarrow P_1P_2 \cup P_1F_2 \cup F_1P_2$ et donc $P(A) = P(P_1P_2) + P(P_1F_2) + P(F_1P_2)$ car les évènements sont disjoints. Soit, par la formule des probabilités composées :

$$P(A) = P(P_1)P_{P_1}(P_2) + P(P_1)P_{P_1}(F_2) + P(F_1)P_{F_1}(P_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times p = \frac{1+p}{2}$$

- Soit on remarque que $A \Leftrightarrow \overline{F_1F_2}$ et donc

$$P(A) = 1 - P(F_1F_2) = 1 - P(F_1)P_{F_1}(F_2) = 1 - \frac{1}{2} \times (1-p) = \frac{1+p}{2}$$

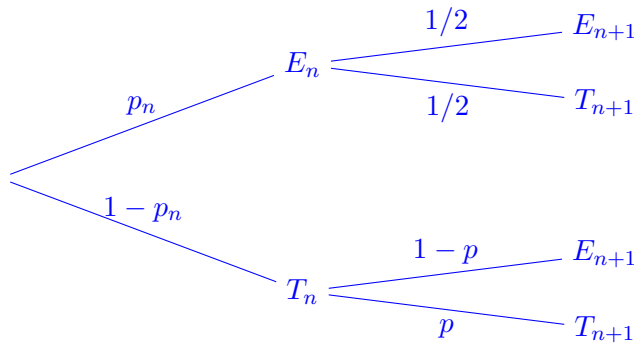
4. Calculer la probabilité d'obtenir le premier Face au deuxième lancer.

On cherche ici $P(P_1F_2) = P(P_1)P_{P_1}(F_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Une relation de récurrence.

5. Exprimer $P(E_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, pour tout $n \geq 1$

Posons $p_n = P(E_n)$. Représentons le passage du n -ième lancer au $n+1$ -ième lancer dans un arbre :



(E_n, T_n) forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(E_{n+1}) \\ &= P(E_n)P_{E_n}(E_{n+1}) + P(T_n)P_{T_n}(E_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{1}{2} + (1 - p_n) \times (1 - p) \text{ Si on est sur la pièce T pour reprendre la pièce E il faut faire Face} \\ &= \left(\frac{1}{2} - (1 - p) \right) \times p_n + 1 - p \\ &= \frac{1 + 2p}{2} \times p_n + 1 - p \end{aligned}$$

6. En déduire la valeur de $P(E_n)$ en fonction de $n \geq 1$.

(p_n) est une suite arithmético-géométrique, on résout :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 + 2p}{2}x + 1 - p \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1 + 2p}{2} \right) x = 1 - p \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - 2p}{2}x = 1 - p \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2(1 - p)}{1 - 2p} \end{aligned}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = p_n - \frac{2(1-p)}{1-2p}$. Alors

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2(1-p)}{1-2p} \\
 &= \frac{1+2p}{2} \times p_n + 1-p - \frac{2(1-p)}{1-2p} \\
 &= \frac{1+2p}{2} \times p_n + \frac{(1-p)(1-2p) - 2(1-p)}{1-2p} \\
 &= \frac{1+2p}{2} \times p_n - \frac{(1-p)(1+2p)}{1-2p} \\
 &= \frac{1+2p}{2} \left(p_n - \frac{2(1-p)}{1-2p} \right) \\
 &= \frac{1+2p}{2} u_n
 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\frac{1+2p}{2}$ et de premier terme

$$u_1 = p_1 - \frac{2(1-p)}{1-2p} = P(E_1) - \frac{2(1-p)}{1-2p} = 1 - \frac{2(1-p)}{1-2p} = \frac{2p}{1-2p}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\frac{1+2p}{2} \right)^{n-1} \times \frac{2p}{1-2p}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = u_n + \frac{2(1-p)}{1-2p} = \left(\frac{1+2p}{2} \right)^{n-1} \times \frac{2p}{1-2p} + \frac{2(1-p)}{1-2p}$$

Le premier Pile et le premier Face.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement "le premier Pile est obtenu lors du n -ième lancer" et B_n l'évènement "le premier Face est obtenu lors du n -ième lancer".

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité de B_n .

On a $B_n \Leftrightarrow P_1 P_2 \dots P_{n-1} F_n$. Donc Par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
 P(B_n) &= P(P_1)P_{P_1}(P_2)P_{P_1 P_2}(P_3) \dots P_{P_1 \dots P_{n-2}}(P_{n-1})P_{P_1 \dots P_{n-1}}(F_n) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}
 \end{aligned}$$

Car tout du long on garde la pièce équilibrée car on ne fait que des Piles.

8. Calculer les probabilités de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 .

$$P(A_1) = P(P_1) = \frac{1}{2}$$

Car on faire le premier lancer avec la pièce équilibrée.

$$P(A_2) = P(F_1 P_2) = P(F_1)P_{F_1}(P_2) = \frac{1}{2} \times p = \frac{p}{2}$$

Car le premier lancer donne Face donc pour le lancer 2 on utilise la pièce truquée.

$$P(A_3) = P(F_1 F_2 P_3) = P(F_1)P_{F_1}(F_2)P_{F_1 F_2}(P_3) = \frac{1}{2} \times (1-p) \times \frac{1-p}{4}$$

Car on 2 faces au début donc le premier lancer se fait avec la pièce équilibrée, le deuxième avec la pièce truquée et le troisième avec la pièce équilibrée.

$$P(A_4) = P(F_1 F_2 F_3 P_4) = P(F_1)P_{F_1}(F_2)P_{F_1 F_2}(P_3)P_{F_1 F_2 F_3}(P_4) = \frac{1}{2} \times (1-p) \times \frac{1}{2} \times p = \frac{p(1-p)}{4}$$

Car le premier lancer se fait avec la pièce équilibrée, le deuxième avec la pièce truquée, le troisième avec la pièce équilibrée et le quatrième avec la pièce truquée car on ne fait que des faces au début donc on change de pièce à chaque tour.

9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité $P(A_{2n})$, et pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité $P(A_{2n+1})$.

On a :

$$\begin{aligned}
 P(A_{2n}) &= P(F_1 F_2 F_3 \dots F_{2n-1} P_{2n}) \\
 &= P(F_1) P_{F_1}(F_2) P_{F_1 F_2}(F_3) \dots P_{F_1 F_2 \dots F_{2n-2}}(F_{2n-1}) P_{F_1 \dots F_{2n-1}}(P_{2n}) \\
 &= \frac{1}{2} \times (1-p) \times \frac{1}{2} \times (1-p) \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times (1-p) \times \frac{1}{2} \times p \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-p)^{n-1} p
 \end{aligned}$$

car les lancers se font une fois sur deux avec la pièce équilibrée et une fois sur deux avec la pièce truquée en commençant par la pièce équilibrée.

De même, on a :

$$\begin{aligned}
 P(A_{2n+1}) &= P(F_1 F_2 F_3 \dots F_{2n} P_{2n+1}) \\
 &= P(F_1) P_{F_1}(F_2) P_{F_1 F_2}(F_3) \dots P_{F_1 F_2 \dots F_{2n-1}}(F_{2n}) P_{F_1 \dots F_{2n}}(P_{2n+1}) \\
 &= \frac{1}{2} \times (1-p) \times \frac{1}{2} \times (1-p) \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times (1-p) \times \frac{1}{2} \times (1-p) \times \frac{1}{2} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (1-p)^n
 \end{aligned}$$