

Devoir surveillé 3 Sujet 2 du 12/12/2025
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 3 pages

Exercice 1. (Barème indicatif : 16)

1. On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

- (a) Donner un exemple d'une telle fonction.

La fonction identité fonctionne, en effet $id(x + y) = x + y = id(x) + id(y)$

- (b) Soit une fonction vérifiant (1) (non nécessairement celle de la première question)

- i. Montrer que $f(0) = 0$

Soit f vérifiant (1) alors $f(0 + 0) = f(0) + (0)$ et donc $f(0) = 2f(0)$, nécessairement $f(0) = 0$

- ii. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$f(px) = pf(x)$$

Montrons ce résultat par récurrence sur p . Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathcal{P}(p) : "f(px) = pf(x)"$.

Initialisation : $f(1 \times x) = f(x) = 1 \times f(x)$ Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $p \geq 1$, supposons que $\mathcal{P}(p)$ est vraie alors, on sait que $f(px) = pf(x)$.

Ainsi $f((p+1)x) = f(px + x) = f(px) + f(x) = pf(x) + f(x)$ par Hypothèse de récurrence, et donc $f((p+1)x) = (p+1)f(x)$. Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence on a montré que $f(px) = pf(x)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

- iii. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}f(x)$$

On sait d'après la question précédente que $f(px) = pf(x)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Ainsi on peut en déduire que

$$f(x) = f\left(p \times \frac{1}{p}x\right) = pf\left(\frac{1}{p}x\right)$$

Et donc que $f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}f(x)$

- iv. Vérifier que les deux relations précédentes restent vraies pour $p \in \mathbb{Z}^*$

Si $p \in \mathbb{N}^*$ le résultat est vraie, donc il reste à vérifier le cas $p < 0$. On a :

$$f(px - px) = f(px) + f(-px) = f(px) - pf(x)$$

car $-p \in \mathbb{N}^*$.

Or $f(px - px) = f(0) = 0$ par la question i). Ainsi $f(px) - pf(x) = 0$ soit $f(px) = pf(x)$.

Avec le même raisonnement on peut montrer que $f\left(\frac{1}{p}x\right) = \frac{1}{p}f(x)$

- v. En déduire que pour tout x rationnel $f(x) = xf(1)$

Soit x un nombre rationnel, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, tels que $x = \frac{p}{q}$. Et

$$f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}f(p) = \frac{1}{q}pf(1) = xf(1)$$

- (c) i. Démontrer que pour tout réel x ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

Indication : On rappelle que $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de $\lfloor nx \rfloor$ on sait que $\lfloor nx \rfloor \leq nx \leq \lfloor nx \rfloor + 1$. Ainsi

$$nx - 1 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx$$

Et donc $\frac{nx-1}{n} \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq \frac{nx}{n}$. Soit

$$x - \frac{1}{n} \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{n} = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x = x$. Donc par le théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$

- ii. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.

On remarque que $f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} f(1)$ car $\lfloor nx \rfloor \in \mathbb{Z}$ et donc $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in \mathbb{Q}$.

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} f(1) = xf(1)$$

. Et comme f est continue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right) = f(x)$.

- (d) En déduire que toutes les fonctions vérifiant 1 sont exactement les fonctions de la forme $f : x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{R}$

On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on doit avoir nécessairement $f(x) = xf(1)$, donc en posant $a = f(1)$ f est forcément de la forme $f(x) = ax$. Réciproquement si f est de la forme $f(x) = ax$, alors $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$, et f est continue donc f vérifie (1)

2. On veut déterminer maintenant les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x+y) = g(x) \times g(y) \quad (2)$$

- (a) Montrer que s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$ alors g est la fonction nulle.

Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$, alors soit $x \in \mathbb{R}$ on a $g(x) = g(x - x_0 + x_0) = g(x - x_0) \times g(x_0) = g(x - x_0) \times 0 = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$. g est la fonction nulle.

- (b) Justifier que si g n'est pas la fonction nulle alors g est strictement positive. *Indication : On pourra regarder $g(2x)$.*

Supposons que g n'est pas la fonction nulle alors par la question précédente, g ne s'annule pas, de plus :

$$g(x) = g\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2}\right) \times g\left(\frac{x}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et comme g ne s'annule pas, $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc g est strictement positive.

- (c) Justifier que l'on peut alors définir la fonction $f : x \mapsto \ln(g(x))$

Comme $y \mapsto \ln y$ est définie et continue sur $]0; +\infty[$ et que g est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$ par la question précédente, f est définie sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont.

- (d) Montrer que f vérifie la relation 1

La fonction f est continue comme composée de fonctions qui le sont, de plus on remarque que $f(x+y) = \ln(g(x+y)) = \ln(g(x) \times g(y)) = \ln(g(x)) + \ln(g(y)) = f(x) + f(y)$. Ainsi f est une fonction vérifiant (1).

- (e) Conclure en explicitant toutes les fonctions vérifiant (2).

Donc par l'étude faite en question 1. Il existe a telle que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Et donc $\ln(g(x)) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit par bijectivité de $\exp$, $g(x) = e^{ax}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Réciproquement si $\exists a \in \mathbb{R}$, tel que $g(x) = e^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $g(x+y) = e^{a(x+y)} = e^{ax+ay} = e^{ax} \times e^{ay} = g(x) \times g(y)$.

Exercice 2.

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

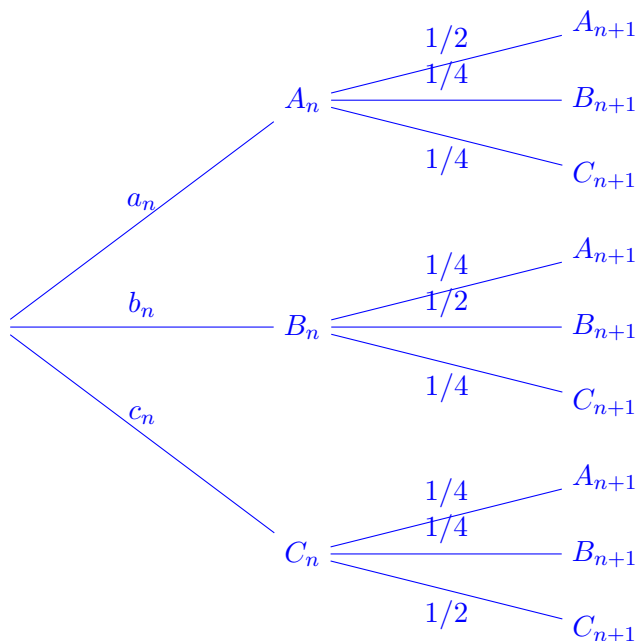
$$a_n = P(A_n), \quad b_n = P(B_n), \quad c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres a_n , b_n et c_n pour $n \in \{0, 1\}$

Au temps $n = 0$, on sait que le pion est en A donc $a_0 = P(A_0) = 1$, $b_0 = P(B_0) = 0$ et $c_0 = P(C_0) = 0$. Comme au temps 0 le pion est en A au temps 1 il a une chance sur deux d'être encore en A , une chance sur quatre d'être en B et une chance sur quatre d'être en C . Donc $a_1 = 1/2$, $b_1 = 1/4$ et $c_1 = 1/4$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n . Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1} .

Représentons le passage de l'étape n à l'étape $n + 1$ dans un arbre :



(A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

De même

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.

On pose $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} MV_n &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2a_n + b_n + c_n \\ a_n + 2b_n + c_n \\ a_n + b_n + 2c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{4} + \frac{c_n}{4} \\ \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2} + \frac{c_n}{4} \\ \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{4} + \frac{c_n}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = V_{n+1} \end{aligned}$$

4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$

En déduire une expression de a_n , b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $V_{n+1} = MV_n$. Donc par une récurrence rapide $V_n = M^n V_0$. (Si cela est vrai au rang n alors $V_{n+1} = MV_n = MM^n V_0 = M^{n+1} V_0$).

$$\text{Donc } V_n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Soit}$$

$$V_n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+2}{3 \times 4^n} \\ \frac{4^n-1}{3 \times 4^n} \\ \frac{4^n-1}{3 \times 4^n} \end{pmatrix}$$

Soit

$$a_n = \frac{4^n + 2}{3 \times 4^n}, \quad b_n = \frac{4^n - 1}{3 \times 4^n} \text{ et } c_n = \frac{4^n - 1}{3 \times 4^n}$$

5. Déterminer les limites respectives des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n + 2}{3 \times 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \times 4^n} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n - 1}{3 \times 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercice 3.

Une urne contient 1 boule noire et $n - 1$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2. On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise, le quatrième s'effectue avec remise... D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1. (a) Quel est le nombre de tirages effectués lors de cette épreuve ?

Le premier tirage enlève une boule de l'urne. Il reste donc $n - 1$ boules dans l'urne. Puis on remarque qu'ensuite il faut à chaque fois 2 tirages pour enlever une boule (car les tirages pairs se font avec remise). Donc pour vider l'urne (et donc enlever les $(n - 1)$ boules restantes) il faudra $2(n - 1)$ tirages. Ainsi il y a en tout $1 + 2(n - 1) = 2n - 1$ tirages.

- (b) Pour $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, combien reste-t-il de boules dans l'urne juste avant le $(2j - 1)$ -ième tirage ?

Juste avant le $(2j - 1)$ -ième tirage on a effectué $2j - 2$ tirages donc $j - 1$ tirages impairs (donc sans remise) et $j - 1$ tirages pairs (donc avec remise). On a donc enlevé $j - 1$ boules il en reste donc $n - (j - 1) = n - j + 1$.

Combien en reste-t-il juste avant le $(2j + 1)$ -ième tirage ?

Juste avant le $(2j + 1)$ -ième tirage on a effectué $2j$ tirages donc j tirages impairs et j tirages pairs. On a donc enlevé j boules, il en reste donc $n - j$.

Combien en reste-t-il juste avant le $(2j)$ -ième tirage ?

Juste avant le $(2j)$ -ième tirage on a déjà effectué $2j - 1$ tirages dont j tirages impairs et $j - 1$ tirages pairs (car on commence par le tirage 1 donc impair). On a donc enlevé j boules il en reste $n - j$ dans l'urne.

2. On désigne par B_k l'évènement "le k -ième tirage donne une boule blanche" et N_k l'évènement "le k -ième tirage donne une boule noire".

- (a) Calculer $P(N_1)$ et $P(N_2)$.

Au premier tirage il y a n boules dont 1 noires donc $P(N_1) = \frac{1}{n}$.

(N_1, B_1) forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$P(N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) + P(B_1)P_{B_1}(N_2) = \frac{1}{n} \times 0 + \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

car si on pioche la boule noire au premier tirage elle n'est pas remise dans l'urne donc $P_{N_1}(N_2) = 0$ et si on pioche une blanche au 1er tirage il reste 1 boule noire et $n - 2$ boules blanches dans l'urne.

- (b) Pour tout entier naturel $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, calculer $P(N_{2j+1})$ et $P(N_{2j})$.

Pour pouvoir tirer la boule noire au $2j+1$ -ième tirage il ne faut pas l'avoir tirée aux tirages impaires précédents. Les tirages pairs cependant peuvent donner n'importe quel résultat puisqu'ils sont avec remise. Donc

$$\begin{aligned} P(N_{2j+1}) &= P(B_1 \cap B_3 \cap B_5 \cap \dots \cap B_{2j-1} \cap N_{2j+1}) \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_3)P_{B_1B_3}(B_5) \dots P_{B_1 \dots B_{2j-3}}(B_{2j-1})P_{B_1 \dots B_{2j-1}}(N_{2j+1}) \end{aligned}$$

Par la formule des probabilités composées

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \times \frac{n-j}{n-j+1} \times \frac{1}{n-j}$$

d'après la question 1.b car il reste toujours une boule noire et les autres sont blanches

$$= \frac{1}{n}$$

De même pour pouvoir tirer la boule noire au $2j$ -ième tirage, il ne faut pas l'avoir tirée aux tirages impairs précédents. Donc

$$\begin{aligned} P(N_{2j}) &= P(B_1 \cap B_3 \cap B_5 \cap \dots \cap B_{2j-1} \cap N_{2j}) \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_3)P_{B_1B_3}(B_5) \dots P_{B_1 \dots B_{2j-3}}(B_{2j-1})P_{B_1 \dots B_{2j-1}}(N_{2j}) \end{aligned}$$

Par la formule des probabilités composées

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \times \frac{n-j}{n-j+1} \times \frac{1}{n-j}$$

d'après la question 1.b car il reste toujours une boule noire et les autres sont blanches

$$= \frac{1}{n}$$

3. Pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note U_j l'évènement "on obtient la boule noire pour la première fois au $(2j+1)$ -ième tirage".

(a) En considérant l'état de l'urne juste avant le $(2n-2)$ -ième tirage, montrer que $P(U_{n-1}) = 0$.

Juste avant le $(2n-2)$ -ième tirage il reste dans l'urne $n - (n-1) = 1$ boules d'après la question 1.b. Donc soit elle est noire et dans ce cas au $2n-2$ -ième tirage on tirera obligatoirement la boule noire, donc la boule noire sera tirée avant le $2(n-1)+1 = 2n-1$ -ième tirage. Soit la boule restante est blanche donc la boule noire ne sera pas tirée au $2n-1$ -ième tirage. Donc $P(U_{n-1}) = 0$.

(b) Montrer que : $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(U_j) = \frac{n-1-j}{n(n-1)}$.

Pour que la boule noire soit tirée pour la première fois au $2j+1$ -ième tirage il faut que tous les tirages précédents soit des boules blanches donc :

$$U_j = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2j} \cap N_{2j+1}$$

Donc par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(U_j) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1B_2}(B_3)P_{B_1B_2B_3}(B_4)\dots P_{B_1\dots B_{2j-1}}(B_{2j})P_{B_1\dots B_{2j}}(N_{2j+1}) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \times \frac{n-j}{n-j+1} \times \frac{n-j-1}{n-j} \times \frac{1}{n-j} \\ &= \frac{n-j-1}{n(n-1)} \text{ par télescope} \end{aligned}$$

(c) Ecrire l'évènement A "on obtient une seule boule noire lors de cette épreuve" à l'aide des évènements U_j .

Pour que la boule noire ne soit tirée qu'une seule fois il faut qu'elle soit retirée de l'urne dès qu'elle est tirée pour la première fois. Pour cela il faut qu'elle soit tirée pour la première fois sur un tirage impair. Donc

$$A = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}$$

(d) Calculer $P(A)$.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} P(U_j) \text{ car les évènements sont disjoints} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n-j-1}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} n-j-1 \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k \quad \text{par changement d'indice } k = n-1-j \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 4.

On introduit la fonction $f : x \mapsto (\sin(x))^{\cos(x)}$.

1. Justifier que f est définie sur $A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi; (2k+1)\pi[$. Quel est le signe de f sur A ?

On peut réécrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = e^{\cos(x) \ln(\sin(x))}$. Ainsi par composition f est définie en x ssi $\sin(x) > 0$ ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$ ssi $x \in A$.

De plus par positivité de l'exponentielle $f(x) > 0$ pour tout $x \in A$.

2. Montrer que f est 2π -périodique sur A .

Pour tout $x \in A$, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$, alors $x + 2\pi \in]2(k+1)\pi, (2(k+1)+1)\pi[$ donc $x + 2\pi \in A$. Et

$$f(x + 2\pi) = e^{\cos(x+2\pi) \ln(\sin(x+2\pi))} = e^{\cos(x) \ln(\sin(x))} = f(x)$$

Par 2π -périodicité de $\cos$ et $\sin$.

f est donc 2π -périodique.

On étudie désormais f sur l'intervalle $]0, \pi[$.

3. Calculer les limites de f en 0^+ et π^- . Que dire alors de la continuité de f en 0 ?

D'une part $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin(x)) = -\infty$. Et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) = 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) \ln(\sin(x)) = -\infty$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\cos(x) \ln(\sin(x))} = 0$ par composée de limites.

D'autre part : $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin(x) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \ln(\sin(x)) = -\infty$. Et $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cos(x) = -1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cos(x) \ln(\sin(x)) = +\infty$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} e^{\cos(x) \ln(\sin(x))} = +\infty$ par composée de limites.

f est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$

4. On pose $g : x \mapsto \frac{1}{x} - x(\ln(x) + 1)$.

- (a) Montrer que g est strictement décroissante sur $]0, 1]$.

g est dérivable sur $]0, 1]$ comme produit et somme de fonctions qui le sont et

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - ((\ln(x) + 1) + x\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} - \ln(x) - 2$$

g' est elle-même dérivable sur $]0, 1]$ et

$$g''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} = \frac{2-x^2}{x^3} > 0 \quad \forall x \in]0, 1]$$

Donc g' est strictement croissante, or $g'(1) = -3 < 0$. Ainsi pour tout $x \in]0, 1]$, $g'(x) < 0$ et g est donc strictement décroissante sur $]0, 1]$.

- (b) En déduire le signe de $g(\sin(x))$ pour tout $x \in]0, \pi[$.

On précisera bien toutes les valeurs de x qui annulent $g(\sin(x))$.

Commençons par déterminer le signe de g . g est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et $g(1) = 1 - 1(0 + 1) = 0$. Donc $g(x) \geq 0$ et $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Pour tout $x \in]0, \pi[$, $\sin(x) \in]0, 1]$, donc $g(\sin(x)) \geq 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$. Et $g(\sin(x)) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

5. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, \pi[$ et que, pour tout $x \in]0, \pi[$, $f'(x) = g(\sin(x))f(x)$.
 f est dérivable sur $]0, \pi[$ comme composée de fonctions qui le sont et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-\sin(x) \ln(\sin(x) + \cos(x) \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)) \right) e^{\cos(x) \ln(\sin(x))} \\ &= \left(-\sin(x) \ln(\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} \right) e^{\cos(x) \ln(\sin(x))} \\ &= \left(-\sin(x) \ln(\sin(x)) + \frac{1 - \sin^2(x)}{\sin(x)} \right) e^{\cos(x) \ln(\sin(x))} \\ &= \left(-\sin(x) \ln(\sin(x)) + \frac{1}{\sin(x)} - \sin(x) \right) e^{\cos(x) \ln(\sin(x))} \\ &= \left(\frac{1}{\sin(x)} - \sin(x)(\ln(x) + 1) \right) e^{\cos(x) \ln(\sin(x))} \\ &= g(\sin(x))f(x) \end{aligned}$$

- (b) Construire le tableau de variations de f .

On sait que pour tout $x \in]0, \pi[$, $f(x) > 0$. Par ailleurs, pour tout $x \in]0, \pi[$, $g(\sin(x)) \geq 0$ avec $g(\sin(x)) = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2$. Et $f(\pi/2) = e^{\cos(\pi/2) \ln(\sin(\pi/2))} = 1$. Ainsi le tableau de variations de f est le suivant :

x	0	$\pi/2$	π
$f'(x)$	+	0	+
f	0	1	$+\infty$

6. (a) Calculer la limite de $\varphi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto -x^2 \ln(x)$ en 0^+ .

Par les croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0$.

- (b) Montrer que, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $1 - \cos(x) \leq \sin^2(x)$.

Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= 1 - \cos^2(x) \\ &= (1 - \cos(x))(1 + \cos(x)) \\ &\geq (1 - \cos(x)) \times 1 \text{ car } \cos(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, \pi/2] \\ &\geq (1 - \cos(x)) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

- (c) En déduire que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad 1 \leq (\sin(x))^{\cos(x)-1} \leq e^{\varphi(\sin(x))}$$

Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos(x) - 1 \leq 0$, et $\ln(\sin(x)) \leq 0$, ainsi $(\cos(x) - 1) \ln(\sin(x)) \geq 0$ et donc $(\sin(x))^{\cos(x)-1} \geq e^0 = 1$.

De plus par ce qui précède : $\cos(x) - 1 \geq -\sin^2(x)$ et donc $(\cos(x) - 1) \ln(\sin(x)) \leq -\sin^2(x) \ln(\sin(x))$ car $\ln(\sin(x)) \leq 0$. Ainsi

$$(\sin(x))^{\cos(x)-1} = e^{(\cos(x)-1) \ln(\sin(x))} \leq e^{-\sin^2(x) \ln(\sin(x))} = e^{\varphi(\sin(x))}$$

(d) Vérifier que, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = (\sin(x))^{\cos(x)-1} \times \frac{\sin(x)}{x}$$

Avec la prolongation $f(0) = 0$, on a donc ici :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{f(x)}{x} \\ &= \frac{(\sin(x))^{\cos(x)}}{x} \\ &= \frac{(\sin(x))^{\cos(x)-1} \sin(x)}{x} \\ &= \sin(x)^{\cos(x)-1} \times \frac{\sin(x)}{x} \end{aligned}$$

(e) En déduire que f est dérivable en 0^+ et que $f'(0) = 1$

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x)^{\cos(x)-1} \times \frac{\sin(x)}{x}$.

Or, d'une part, on sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

D'autre part, $1 \leq (\sin(x))^{\cos(x)-1} \leq e^{\varphi(\sin(x))}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(\sin(x)) = 0$ par composée de limites, donc

$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\varphi(x)} = 1$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{\cos(x)-1} = 1$ par le théorème d'encadrement.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ et f est donc dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 1$.

7. Justifier que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique $x \in [0, \pi[$ tel que $y = (\sin(x))^{\cos(x)}$.

D'après l'étude de f , f est continue et strictement croissante de $[0, \pi[$ dans $\mathbb{R}^+$, par le théorème de la bijection elle réalise donc une bijection de $[0, \pi[$ dans $\mathbb{R}^+$, donc pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique $x \in [0, \pi[$ tel que $y = f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$

8. Ecrire une fonction en Python qui prend en entrée n et qui représente la courbe représentative de f sur $\mathcal{D}_f \cap [-2n\pi; (2n+1)\pi]$.

On utilisera une boucle for pour représenter $\mathcal{C}_f$ sur chaque intervalle $[2k\pi; (2k+1)\pi]$, $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$.

```
1 def f(x):
2     return np.exp(np.cos(x)*np.log(np.sin(x)))
```

```
1 def graphe(n):
2     for k in range(-n,n+1):
3         x=np.arange(2*k*np.pi, (2*k+1)*np.pi,0.1)
4         plt.plot(x,f(x))
```

On obtient avec $n = 5$, le graphe suivant :

