
Devoir surveillé 3 Sujet 3 du 12/12/2025
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 3 pages

Exercice 1. Ecriricome 2015 ECS

1. On note pour tout $x \in I =]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \text{ et } g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}$$

- (a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(x) + \tan(x)}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(x)}{3x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{3x \cos(x)} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \end{aligned} \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

De même

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin(x)}{x(2 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \times \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{2 + \cos(x)} = 3 \times 1 \times \frac{1}{3} = 1. \end{aligned}$$

- (b) Factoriser le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

On observe que 1 est racine évidente de P , ce qui conduit à $P = (x-1)(2x^2 - x - 1)$ (par division euclidienne). Et donc $P = (x-1)(x-1)(2x+1) = (x-1)^2(2x+1)$.

- (c) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.

Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.

La fonction u est dérivable sur I comme somme de fonctions qui le sont et

$$\forall x \in I, \quad u'(x) = \frac{1}{3} \left(2\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} \right) - 1 = \frac{2\cos^3(x) - 3\cos^2(x) + 1}{3\cos^2(x)} = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}.$$

- (d) En déduire les variations de u sur I .

D'après les questions précédentes, on a

$$u'(x) = \frac{(\cos(x) - 1)^2(2\cos(x) + 1)}{3\cos^2(x)}$$

Donc $u'(x)$ est du signe de $2\cos(x) + 1$. Or pour $x \in I$, $2\cos(x) + 1 \geq 1 > 0$. Donc u est strictement croissante sur I .

- (e) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.

Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$,

$$v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos(x))^2}.$$

La fonction v est dérivable sur I avec :

$$\forall x \in I, \quad v'(x) = 1 - \frac{3 \cos x (2 + \cos x) + 3(1 - \cos^2 x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{Q(\cos x)}{(2 + \cos x)^2}$$

pour $Q = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

- (f) En déduire les variations de v sur I .

On a donc $v'(x) = \frac{(\cos(x) - 1)^2}{(2 + \cos x)^2} \geq 0$ pour tout $x \in I$. v est donc strictement croissante sur I .

- (g) Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad g(x) < x < f(x).$$

On a $g(x) < x < f(x) \Leftrightarrow x - g(x) > 0$ et $f(x) - x > 0 \Leftrightarrow v(x) > 0$ et $u(x) > 0$. Or

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = 0$$

Comme u et v sont strictement croissantes, $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$ sur I . Ainsi on a bien :

$$\forall x \in I, \quad g(x) < x < f(x)$$

2. (a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

On a

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{12} &= \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

- (b) Dédurre de la question 1g un encadrement de π .

L'encadrement de la question 1g pour $x = \frac{\pi}{12}$ donne :

$$\frac{3 \sin \frac{\pi}{12}}{2 + \cos \frac{\pi}{12}} < \frac{\pi}{12} < \frac{1}{3} \left(2 \sin \frac{\pi}{12} + \tan \frac{\pi}{12} \right)$$

Soit

$$\frac{3\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{2+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} < \frac{\pi}{12} < \frac{1}{3} \left(2\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + 2 - \sqrt{3} \right)$$

Et donc après simplifications :

$$\frac{9\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} < \pi < 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 8 - 4\sqrt{3}$$

3. On pose pour tout entier naturel n ,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \text{ et } b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

(a) Justifier que pour tout réel θ ,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos(\theta + \theta) = \cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ &= 1 - \sin^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ &= 1 - 2\sin^2(\theta) \end{aligned}$$

et en déduire que pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} (*) \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} (**)$$

Par la relation précédente on a donc $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$. Donc

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= \sin^2\left(\frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)}{2} \\ &= \frac{1 - b_n}{2} \end{aligned}$$

Or pour tout entier naturel n , $\frac{\pi}{3 \times 2^n} \in I$, donc $a_n \geq 0$. Ainsi nécessairement

$$a_n = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}}$$

De même, on pourrait montrer que $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. Et on obtiendrait alors $b_{n+1}^2 = \frac{b_n+1}{2}$. Et comme $b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} = \sqrt{\frac{b_n+1}{2}}$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right).$$

En appliquant l'encadrement de la question 1g à $x = \frac{\pi}{3 \times 2^n} = \theta_n$. On a :

$$g(\theta_n) \leq \theta_n \leq f(\theta_n)$$

. Soit

$$3 \times 2^n g(\theta_n) < \pi < 3 \times 2^n f(\theta_n)$$

Soit

$$3 \times 2^n \frac{3 \sin(\theta_n)}{2 + \cos(\theta_n)} < \pi < \frac{3 \times 2^n}{3} (2 \sin(\theta_n) + \tan(\theta_n))$$

Et donc

$$3 \times 2^n \times \frac{3a_n}{2 + b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right)$$

(c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers l'infini.

On a vu en q1 que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 1.$$

Donc comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\theta_n)}{\theta_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(\theta_n)}{\theta_n} = 1$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times 2^n g(\theta_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \times 2^n}{\pi} g(\theta_n) \pi \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(\theta_n)}{\theta_n} \pi = \pi \end{aligned}$$

De même $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times 2^n f(\theta_n) = \pi$.

Exercice 2.

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

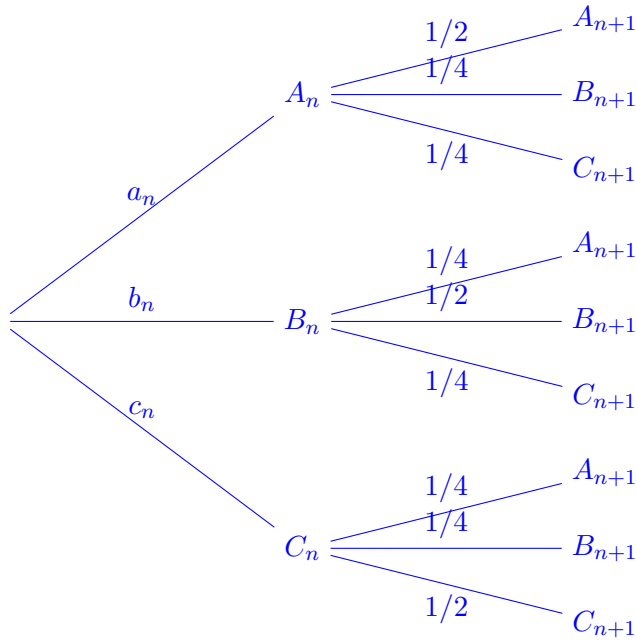
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n), \quad b_n = P(B_n), \quad c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres a_n , b_n et c_n pour $n \in \{0, 1\}$

Au temps $n = 0$, on sait que le pion est en A donc $a_0 = P(A_0) = 1$, $b_0 = P(B_0) = 0$ et $c_0 = P(C_0) = 0$. Comme au temps 0 le pion est en A au temps 1 il a une chance sur deux d'être encore en A , une chance sur quatre d'être en B et une chance sur quatre d'être en C . Donc $a_1 = 1/2$, $b_1 = 1/4$ et $c_1 = 1/4$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n . Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1} .
Représentons le passage de l'étape n à l'étape $n+1$ dans un arbre :



(A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

De même

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \text{ et } c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

3. Soit $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $V_{n+1} = MV_n$.

$$\begin{aligned} MV_n &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2a_n + b_n + c_n \\ a_n + 2b_n + c_n \\ a_n + b_n + 2c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{4} + \frac{c_n}{4} \\ \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2} + \frac{c_n}{4} \\ \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{4} + \frac{c_n}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = V_{n+1} \end{aligned}$$

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Soit B telle que $A = I_3 + B$. Calculer B^2 . En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Alors}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3B$$

Alors posons pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$: " $B^n = 3^{n-1}B$."

Initialisation : $3^{1-1}B = B = B^1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, alors

$$B^{n+1} = B^n \times B = 3^{n-1}B \times B = 3^{n-1}B^2 = 3^{n-1} \times 3B = 3^n B$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \geq 1$, $B^n = 3^{n-1}B$.

Attention la formule ne s'applique pas pour $B^0 = I_3$.

- (b) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $I_3 B = B I_3 = B$. Donc on applique la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
 A^n &= (I_3 + B)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k \\
 &= \binom{n}{0} B^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} B && \text{par la question précédente} \\
 &= I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} \right) B \\
 &= I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k - \binom{n}{0} 3^0 \right) B \\
 &= I_3 + \frac{1}{3} ((3+1)^n - 1) B \\
 &= I_3 + \frac{1}{3} (4^n - 1) B \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4^n - 1}{3} & \frac{4^n - 1}{3} & \frac{4^n - 1}{3} \\ \frac{4^n - 1}{3} & \frac{4^n - 1}{3} & \frac{4^n - 1}{3} \\ \frac{4^n - 1}{3} & \frac{4^n - 1}{3} & \frac{4^n - 1}{3} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{4^n + 2}{3} & \frac{4^n - 1}{3} & \frac{4^n - 1}{3} \\ \frac{4^n - 1}{3} & \frac{4^n + 2}{3} & \frac{4^n - 1}{3} \\ \frac{4^n - 1}{3} & \frac{4^n - 1}{3} & \frac{4^n + 2}{3} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$

On a $M = \frac{1}{4}A$. Donc

$$M^n = \frac{1}{4^n} A^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$

En déduire une expression de a_n , b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $V_{n+1} = MV_n$. Donc par une récurrence rapide $V_n = M^n V_0$. (Si cela est vrai au rang n alors $V_{n+1} = MV_n = MM^n V_0 = M^{n+1} V_0$).

$$\text{Donc } V_n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Soit}$$

$$V_n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+2}{3 \times 4^n} \\ \frac{4^n-1}{3 \times 4^n} \\ \frac{4^n-1}{3 \times 4^n} \end{pmatrix}$$

Soit

$$a_n = \frac{4^n + 2}{3 \times 4^n}, \quad b_n = \frac{4^n - 1}{3 \times 4^n} \text{ et } c_n = \frac{4^n - 1}{3 \times 4^n}$$

6. Déterminer les limites respectives des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n + 2}{3 \times 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \times 4^n} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n - 1}{3 \times 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 4^n} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercice 3.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 . Sinon le tirage se fait dans l'urne U_2 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement "la boule tirée au n -ième tirage est blanche". On pose également $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1

Posons les évènements A : "le premier tirage se fait dans l'urne U_1 " et B : "le premier tirage se fait dans l'urne U_2 ". (U_1, U_2) est un système complet d'évènements, par la formule des probabilités

totales :

$$\begin{aligned}
 p_1 &= P(B_1) = P(U_1 \cap B_1) + P(U_2 \cap B_1) \\
 &= P(U_1)P_{U_1}(B_1) + P(U_2)P_{U_2}(B_1) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \\
 &= \frac{1}{5} + \frac{2}{7} \\
 &= \frac{17}{35}
 \end{aligned}$$

2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$(B_n, \overline{B}_n)$ est un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= P(B_{n+1}) = P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B}_n)P_{\overline{B}_n}(B_{n+1}) \\
 &= p_n \times \frac{2}{5} + (1 - p_n) \times \frac{4}{7} \\
 &= p_n \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{7} \right) + \frac{4}{7} \\
 &= -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}
 \end{aligned}$$

3. En déduire pour tout entier naturel non nul, la valeur de p_n . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

(p_n) est une suite arithmético-géométrique. On résout

$$x = -\frac{6}{35}x + \frac{4}{7} \Leftrightarrow x = \frac{20}{41}$$

On pose $u_n = p_n - \frac{20}{41}$. Alors

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{20}{41} \\
 &= -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7} - \frac{20}{41} \\
 &= -\frac{6}{35}p_n + \frac{24}{7 \times 41} \\
 &= -\frac{6}{35} \left(u_n + \frac{20}{41} \right) + \frac{24}{7 \times 41} \\
 &= -\frac{6}{35}u_n - \frac{6}{35} \times \frac{20}{41} + \frac{24}{7 \times 41} \\
 &= -\frac{6}{35}u_n - \frac{6 \times 4}{7 \times 41} + \frac{24}{7 \times 41} \\
 &= -\frac{6}{35}u_n
 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $-\frac{6}{35}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{20}{41} = \frac{17}{35} - \frac{20}{41} = \frac{697}{35 \times 41}$. Ainsi :

$$u_n = \frac{697}{35 \times 41} \times \left(-\frac{6}{35} \right)^{n-1}$$

Donc

$$p_n = u_n + \frac{20}{41} = \frac{697}{35 \times 41} \times \left(\frac{-6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}$$

Et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{20}{41}$$

$$\text{car } -1 < \frac{-6}{35} < 1.$$

Exercice 4.

Une urne contient 1 boule noire et $n - 1$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2. On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise, le quatrième s'effectue avec remise... D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1. (a) Quel est le nombre de tirages effectués lors de cette épreuve ?

Le premier tirage enlève une boule de l'urne. Il reste donc $n - 1$ boules dans l'urne. Puis on remarque qu'ensuite il faut à chaque fois 2 tirages pour enlever une boule (car les tirages pairs se font avec remise). Donc pour vider l'urne (et donc enlever les $(n - 1)$ boules restantes) il faudra $2(n - 1)$ tirages. Ainsi il y a en tout $1 + 2(n - 1) = 2n - 1$ tirages.

- (b) Pour $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, combien reste-t-il de boules dans l'urne juste avant le $(2j - 1)$ -ième tirage ?

Juste avant le $(2j - 1)$ -ième tirage on a effectué $2j - 2$ tirages donc $j - 1$ tirages impairs (donc sans remise) et $j - 1$ tirages pairs (donc avec remise). On a donc enlevé $j - 1$ boules il en reste donc $n - (j - 1) = n - j + 1$.

Combien en reste-t-il juste avant le $(2j + 1)$ -ième tirage ?

Juste avant le $(2j + 1)$ -ième tirage on a effectué $2j$ tirages donc j tirages impairs et j tirages pairs. On a donc enlevé j boules, il en reste donc $n - j$.

Combien en reste-t-il juste avant le $(2j)$ -ième tirage ?

Juste avant le $(2j)$ -ième tirage on a déjà effectué $2j - 1$ tirages dont j tirages impairs et $j - 1$ tirages pairs (car on commence par le tirage 1 donc impair). On a donc enlevé j boules il en reste $n - j$ dans l'urne.

2. On désigne par B_k l'évènement "le k -ième tirage donne une boule blanche" et N_k l'évènement "le k -ième tirage donne une boule noire".

- (a) Calculer $P(N_1)$ et $P(N_2)$.

Au premier tirage il y a n boules dont 1 noires donc $P(N_1) = \frac{1}{n}$.

(N_1, B_1) forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$P(N_2) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) + P(B_1)P_{B_1}(N_2) = \frac{1}{n} \times 0 + \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

car si on pioche la boule noire au premier tirage elle n'est pas remise dans l'urne donc $P_{N_1}(N_2) = 0$ et si on pioche une blanche au 1er tirage il reste 1 boule noire et $n - 2$ boules blanches dans l'urne.

- (b) Pour tout entier naturel $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, calculer $P(N_{2j+1})$ et $P(N_{2j})$.

Pour pouvoir tirer la boule noire au $2j+1$ -ième tirage il ne faut pas l'avoir tirée aux tirages impaires précédents. Les tirages paires cependant peuvent donner n'importe quel résultat puisqu'ils sont

avec remise. Donc

$$\begin{aligned} P(N_{2j+1}) &= P(B_1 \cap B_3 \cap B_5 \cap \dots \cap B_{2j-1} \cap N_{2j+1}) \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_3)P_{B_1B_3}(B_5)\dots P_{B_1\dots B_{2j-3}}(B_{2j-1})P_{B_1\dots B_{2j-1}}(N_{2j+1}) \end{aligned}$$

Par la formule des probabilités composées

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \times \frac{n-j}{n-j+1} \times \frac{1}{n-j}$$

d'après la question 1.b car il reste toujours une boule noire et les autres sont blanches

$$= \frac{1}{n}$$

De même pour pouvoir tirer la boule noire au $2j$ -ième tirage, il ne faut pas l'avoir tirée au tirages impairs précédents. Donc

$$\begin{aligned} P(N_{2j}) &= P(B_1 \cap B_3 \cap B_5 \cap \dots \cap B_{2j-1} \cap N_{2j}) \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_3)P_{B_1B_3}(B_5)\dots P_{B_1\dots B_{2j-3}}(B_{2j-1})P_{B_1\dots B_{2j-1}}(N_{2j}) \end{aligned}$$

Par la formule des probabilités composées

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \times \frac{n-j}{n-j+1} \times \frac{1}{n-j}$$

d'après la question 1.b car il reste toujours une boule noire et les autres sont blanches

$$= \frac{1}{n}$$

3. Pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note U_j l'évènement "on obtient la boule noire pour la première fois au $(2j+1)$ -ième tirage".

(a) En considérant l'état de l'urne juste avant le $(2n-2)$ -ième tirage, montrer que $P(U_{n-1}) = 0$.

Juste avant le $(2n-2)$ -ième tirage il reste dans l'urne $n - (n-1) = 1$ boules d'après la question 1.b. Donc soit elle est noire et dans ce cas au $2n-2$ -ième tirage on tirera obligatoirement la boule noire, donc la boule noire sera tirée avant le $2(n-1)+1 = 2n-1$ -ième tirage. Soit la boule restante est blanche donc la boule noire ne sera pas tirée au $2n-1$ -ième tirage. Donc $P(U_{n-1}) = 0$.

(b) Montrer que : $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $P(U_j) = \frac{n-1-j}{n(n-1)}$.

Pour que la boule noire soit tirée pour la première fois au $2j+1$ -ième tirage il faut que tous les tirages précédents soit des boules blanches donc :

$$U_j = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{2j} \cap N_{2j+1}$$

Donc par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(U_j) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1B_2}(B_3)P_{B_1B_2B_3}(B_4)\dots P_{B_1\dots B_{2j-1}}(B_{2j})P_{B_1\dots B_{2j}}(N_{2j+1}) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \times \frac{n-j}{n-j+1} \times \frac{n-j-1}{n-j} \times \frac{1}{n-j} \\ &= \frac{n-j-1}{n(n-1)} \text{ par télescopage} \end{aligned}$$

(c) Ecrire l'évènement A "on obtient une seule boule noire lors de cette épreuve" à l'aide des évènements U_j .

Pour que la boule noire ne soit tirée qu'une seule fois il faut qu'elle soit retirée de l'urne dès qu'elle est tirée pour la première fois. Pour cela il faut qu'elle soit tirée pour la première fois sur un tirage impair. Donc

$$A = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}$$

(d) Calculer $P(A)$.

$$\begin{aligned}P(A) &= P(U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}) \\&= \sum_{j=0}^{n-1} P(U_j) \text{ car les évènements sont disjoints} \\&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n-j-1}{n(n-1)} \\&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} n-j-1 \\&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} k && \text{par changement d'indice } k = n-1-j \\&= \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2} \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$