

Chapitre 3

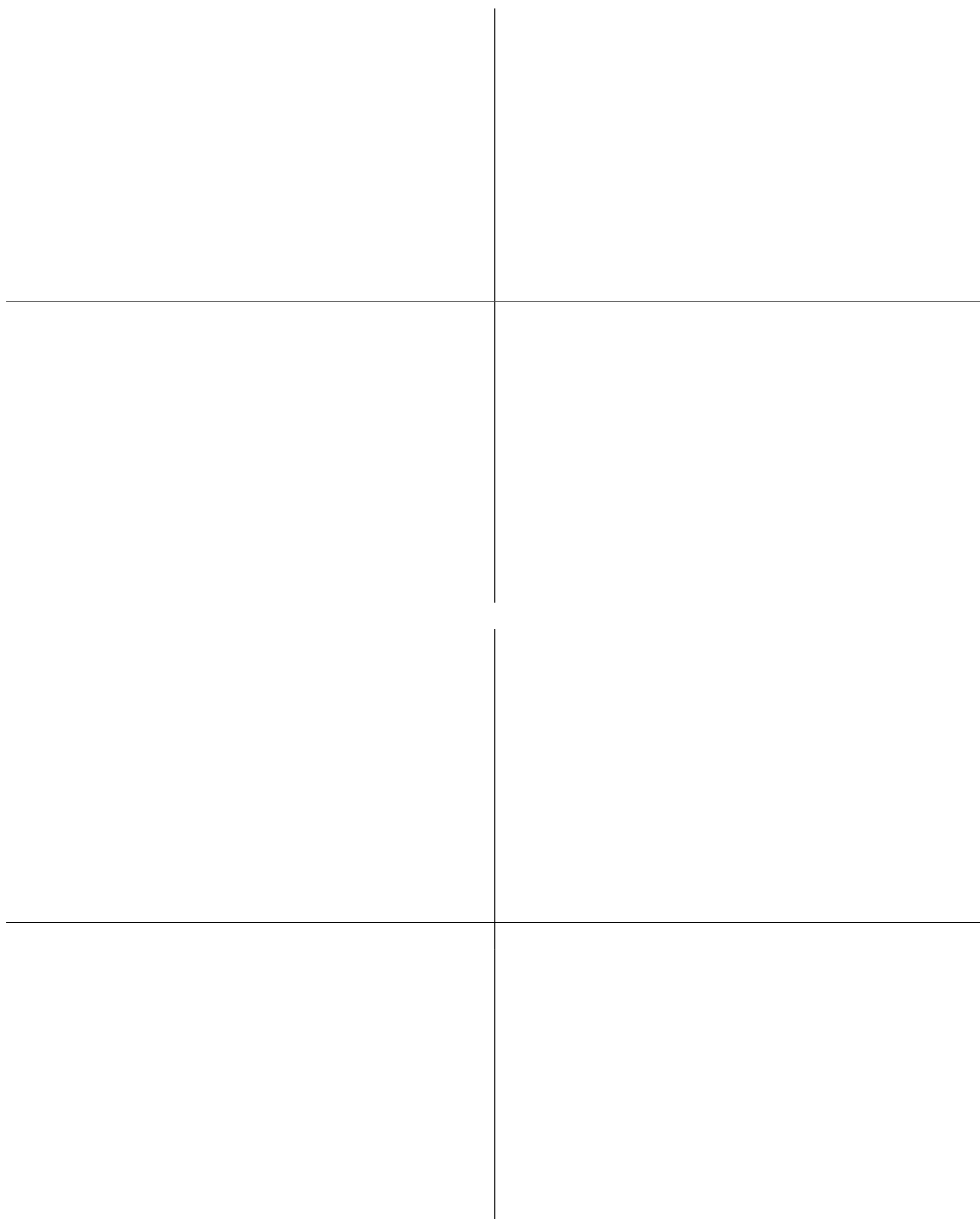
Fonctions usuelles

1 Principales propriétés des fonctions usuelles

1.1 Domaines et dérivées

$f(x)$	Domaine de définition	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
$x^n, n \geq 0$	$\mathbb{R}$	$n \times x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}, n \geq 0$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
$ x $	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$	$\mathbb{R}^*$

Illustration 1.1.1. Il est essentiel de savoir tracer à la main l'allure du graphe de ces fonctions usuelles.



1.2 Fonctions paires, impaires, périodiques

Définition 1.2.1.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0.
 - La fonction f est **paire** si $\forall x \in I, f(x) = f(-x)$.
 - La fonction f est **impaire** si $\forall x \in I, f(x) = -f(-x)$.
- La fonction f est **périodique de période T** si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + T)$.

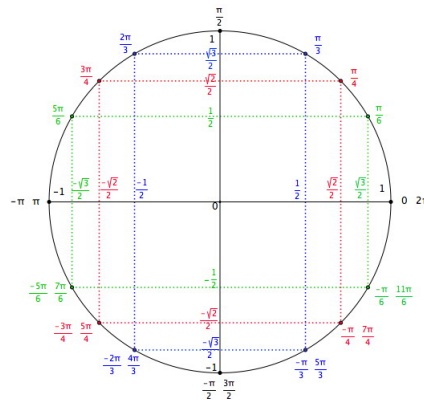
Exemple 1.2.1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 5$ est une fonction paire.

Proposition 1.2.1 (Représentation graphique). La représentation graphique :

- d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repaire.

1.3 Propriétés des fonctions trigonométriques

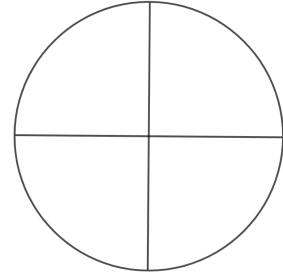
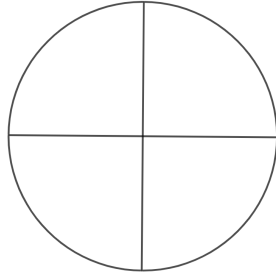
Propriété 1.3.1. Valeurs usuelles de sin et cos



θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Propriété 1.3.2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$
- $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$
- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
- Les fonctions sin et cos sont 2π -périodiques
- La fonction tan est π -périodique
- La fonction cos est paire, les fonctions sin et tan sont impaires.



Propriété 1.3.3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$\cos(x + \frac{\pi}{2}) =$	$\cos(x - \frac{\pi}{2}) =$	$\cos(x + \pi) =$	$\cos(-x) =$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) =$	$\sin(x - \frac{\pi}{2}) =$	$\sin(x + \pi) =$	$\sin(-x) =$
$\tan(x + \frac{\pi}{2}) =$	$\tan(x - \frac{\pi}{2}) =$	$\tan(x + \pi) =$	$\tan(-x) =$

1.4 Propriétés des fonctions $\ln$ et $\exp$

Propriété 1.4.1 (Propriétés de l'exponentielle.). Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$
- $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

Propriété 1.4.2. — $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x$

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \exp(\ln(x)) = x$

Propriété 1.4.3. Des deux propriétés précédentes on peut déduire les propriétés suivantes

- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

2 Composée de fonctions

Définition 2.0.1. Soient E, F et G des ensembles, soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des fonctions. On définit la **composée** $g \circ f : E \rightarrow G$ par

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x))$$

Remarque 2.0.1.

- On ne peut pas toujours composer des applications.
- On n'a pas en général commutativité, c'est-à-dire $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemple 2.0.1.

1. Déterminer $g \circ f$ où $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$.

2. Déterminer $f \circ g$.

3. Pour $f(x) = -|x|$ et $g(x) = \sqrt{x}$, a-t-on existence de $g \circ f$?

3 Règles de dérivation

Théorème 3.0.1.

- Si u et v sont dérivables en a :
 - $u + v$ est dérivable en a et $(u + v)'(a) = u'(a) + v'(a)$,
 - $u \times v$ est dérivable en a et $(u \times v)'(a) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$,
 - si $v(a) \neq 0$, $\frac{u}{v}$ est dérivable en a et $(\frac{u}{v})'(a) = \frac{u'(a) \times v(a) - u(a) \times v'(a)}{v^2(a)}$.
- Si v est dérivable en a et u est dérivable en $v(a)$ alors $u \circ v$ est dérivable et

$$(u \circ v)'(a) = v'(a) \times u'(v(a))$$

Exemple 3.0.1. Préciser l'intervalle de dérivabilité et calculer les dérivées suivantes :

1. $f(x) = x^2 \ln(x) + 4(x + 2)^3$

2. $g(x) = \frac{2x+1}{\ln(x)}$

3. $h(x) = e^{2x^2+3x}$

4. $i(x) = \ln(2\cos(x) + 3x)$

4 Lien avec le sens de variation

Proposition 4.0.1. Soit f dérivable sur I telle que

$$\text{pour tout } x \in I, \quad f'(x) \geq 0$$

alors f est croissante sur I .

Proposition 4.0.2. Soit f dérivable sur I telle que

$$\text{pour tout } x \in I, \quad f'(x) \leq 0$$

alors f est décroissante sur I .

5 Deux nouvelles fonctions usuelles

5.1 La valeur absolue

Définition 5.1.1. La fonction **valeur absolue**, notée $| \cdot |$, est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\begin{aligned} | \cdot | : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Illustration 5.1.1. Dessiner l'allure du graphe de la fonction valeur absolue.

Proposition 5.1.1 (Inégalité triangulaire). Soient x et $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Proposition 5.1.2 (Dérivée). La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée vaut :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

5.2 La partie entière

Définition 5.2.1. La fonction **partie entière**, notée $\lfloor \cdot \rfloor$, est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ qui associe à un réel l'entier le plus proche par valeur inférieure.

Exemple 5.2.1. Donner les parties entières de $x = 4.8$, $y = -2.3$ et $z = -5.6$.

Illustration 5.2.2. Dessiner l'allure du graphe de la fonction partie entière.