
Devoir surveillé 3 Sujet 1 du 12/12/2025
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 3 pages

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = e^x - \ln(x)$ et la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = xe^x - 1$.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- (b) Calculer la dérivée g' de g sur $[0, +\infty[$. En déduire le tableau de variations de g . On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.
- (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$. Vérifier que $\alpha \in [0, 1]$.
- (d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .
2. (a) Ecrire un programme **Python** prenant en entrée x et renvoyant la valeur $f(x)$.
- (b) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- (c) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$. En déduire le tableau des variations de f sur $]0, +\infty[$.
- (d) Justifier que le réel α vérifie $\frac{1}{\alpha} = e^\alpha$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

Exercice 2.

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n), \quad b_n = P(B_n), \quad c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres a_n , b_n et c_n pour $n \in \{0, 1\}$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n . Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1} .
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$

En déduire une expression de a_n , b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Déterminer les limites respectives des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .

Exercice 3.

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$.

1. (a) Montrer que la dérivée de g vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité :

$$g'(x) = \frac{x-1}{x}.$$

- (b) Calculer $g(1)$.

- (c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

- (d) Dresser le tableau des variations de g sur $]0; +\infty[$ en y faisant figurer les résultats obtenus aux questions (1b) et (1c).

- (e) Justifier que pour tout réel $x > 0$ on a : $g(x) > 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x - \ln(x)}.$$

- (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$f'(x) = \frac{1-x}{x(x - \ln(x))^2}.$$

- (b) Dédire de (1c) les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.

- (c) Dresser le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$. On y fera figurer les limites obtenues à la question (2b) ainsi que $f(1)$.

3. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $]0; +\infty[$.

- (a) On pose donc pour tout réel $x > 0$: $h(x) = x - \ln(x) - \frac{1}{x}$. Pourquoi ?

- (b) Montrer que la dérivée de h vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité :

$$h'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}.$$

En déduire le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$.

- (c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Dresser le tableau des variations de h .

- (d) Dédire des questions précédentes que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

Déterminer la valeur de α .

Exercice 4.

On dispose de deux pièces : l'une est équilibrée (la probabilité d'obtenir Pile est $\frac{1}{2}$) et l'autre est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir Pile est $p \in [0, 1]$.

On effectue une suite de lancers de la façon suivante :

- Le premier lancer est effectué avec la pièce équilibrée.
- Ensuite, pour chacun des lancers suivants, on choisit ainsi la pièce :
 - si le résultat précédent est Pile, on conserve la même pièce pour le lancer suivant,
 - si le résultat précédent est Face, on prend l'autre pièce pour le lancer suivant.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

- T_n l'évènement "utiliser la pièce truquée pour le n -ième lancer",
- E_n l'évènement "utiliser la pièce équilibrée pour le n -ième lancer",
- P_n l'évènement "obtenir Pile au n -ième lancer",
- F_n l'évènement "obtenir Face au n -ième lancer".

Les deux premiers lancers

1. Déterminer la probabilité que le deuxième lancer se fasse avec la pièce équilibrée.
2. On a obtenu Pile au deuxième lancer. Calculer la probabilité que ce soit avec la pièce truquée.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un Pile lors des deux premiers lancers.
4. Calculer la probabilité d'obtenir le premier Face au deuxième lancer.

Une relation de récurrence.

5. Exprimer $P(E_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$, pour tout $n \geq 1$
6. En déduire la valeur de $P(E_n)$ en fonction de $n \geq 1$.

Le premier Pile et le premier Face.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement "le premier Pile est obtenu lors du n -ième lancer" et B_n l'évènement "le premier Face est obtenu lors du n -ième lancer".

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité de B_n .
8. Calculer les probabilités de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 .
9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité $P(A_{2n})$, et pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité $P(A_{2n+1})$.

Devoir surveillé 3 Sujet 2 du 12/12/2025
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 3 pages

Exercice 1. (Barème indicatif : 16)

1. On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

- (a) Donner un exemple d'une telle fonction.
(b) Soit une fonction vérifiant (1) (non nécessairement celle de la première question)
i. Montrer que $f(0) = 0$
ii. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$f(px) = pf(x)$$

- iii. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}f(x)$$

- iv. Vérifier que les deux relations précédentes restent vraies pour $p \in \mathbb{Z}^*$
v. En déduire que pour tout x rationnel $f(x) = xf(1)$
(c) i. Démontrer que pour tout réel x ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$$

Indication : On rappelle que $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$

- ii. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.
(d) En déduire que toutes les fonctions vérifiant 1 sont exactement les fonctions de la forme $f : x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{R}$
2. On veut déterminer maintenant les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x + y) = g(x) \times g(y) \quad (2)$$

- (a) Montrer que s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$ alors g est la fonction nulle.
(b) Justifier que si g n'est pas la fonction nulle alors g est strictement positive. *Indication : On pourra regarder $g(2x)$.*
(c) Justifier que l'on peut alors définir la fonction $f : x \mapsto \ln(g(x))$
(d) Montrer que f vérifie la relation 1
(e) Conclure en explicitant toutes les fonctions vérifiant (2).

Exercice 2.

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n), \quad b_n = P(B_n), \quad c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres a_n , b_n et c_n pour $n \in \{0, 1\}$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n . Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1} .
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$

En déduire une expression de a_n , b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Déterminer les limites respectives des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .

Exercice 3.

Une urne contient 1 boule noire et $n - 1$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2. On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise, le quatrième s'effectue avec remise... D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1. (a) Quel est le nombre de tirages effectués lors de cette épreuve ?
 (b) Pour $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, combien reste-t-il de boules dans l'urne juste avant le $(2j - 1)$ -ième tirage ? Combien en reste-t-il juste avant le $(2j + 1)$ -ième tirage ? Combien en reste-t-il juste avant le $(2j)$ -ième tirage ?
2. On désigne par B_k l'évènement "le k -ième tirage donne une boule blanche" et N_k l'évènement "le k -ième tirage donne une boule noire".
 (a) Calculer $P(N_1)$ et $P(N_2)$.
 (b) Pour tout entier naturel $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, calculer $P(N_{2j+1})$ et $P(N_{2j})$.
3. Pour tout $j \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, on note U_j l'évènement "on obtient la boule noire pour la première fois au $(2j + 1)$ -ième tirage".
 (a) En considérant l'état de l'urne juste avant le $(2n - 2)$ -ième tirage, montrer que $P(U_{n-1}) = 0$.
 (b) Montrer que : $\forall j \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, P(U_j) = \frac{n - 1 - j}{n(n - 1)}$.
 (c) Ecrire l'évènement A "on obtient une seule boule noire lors de cette épreuve" à l'aide des évènements U_j .
 (d) Calculer $P(A)$.

Exercice 4.

On introduit la fonction $f : x \mapsto (\sin(x))^{\cos(x)}$.

1. Justifier que f est définie sur $A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi; (2k+1)\pi[$. Quel est le signe de f sur A ?
2. Montrer que f est 2π -périodique sur A .
On étudie désormais f sur l'intervalle $]0; \pi[$.
3. Calculer les limites de f en 0^+ et π^- . f est-elle prolongeable par continuité en ces points?
4. On pose $g : x \mapsto \frac{1}{x} - x(\ln(x) + 1)$.

(a) Montrer que g est strictement décroissante sur $]0, 1]$.

(b) En déduire le signe de $g(\sin(x))$ pour tout $x \in]0, \pi[$.

On précisera bien toutes les valeurs de x qui annulent $g(\sin(x))$.

5. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, \pi[$ et que, pour tout $x \in]0, \pi[$, $f'(x) = g(\sin(x))f(x)$.

(b) Construire le tableau de variations de f .

6. (a) Calculer la limite de $\varphi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto -x^2 \ln(x)$ en 0^+ .

(b) Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1 - \cos(x) \leq \sin^2(x)$.

(c) En déduire que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], 1 \leq (\sin(x))^{\cos(x)-1} \leq e^{\varphi(\sin(x))}.$$

(d) Vérifier que, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = (\sin(x))^{\cos(x)-1} \times \frac{\sin(x)}{x}.$$

(e) En déduire que f est dérivable en 0^+ et que $f'_d(0) = 1$.

7. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, \pi[$.

On fera apparaître les tangentes en 0 et en $\frac{\pi}{2}$ et une asymptote.

8. Justifier que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique $x \in [0, \pi[$ tel que $y = (\sin(x))^{\cos(x)}$.

9. Ecrire une fonction en Python qui prend en entrée n et qui représente la courbe représentative de f sur $\mathcal{D}_f \cap [-2n\pi; (2n+1)\pi]$.

On utilisera une boucle for pour représenter $\mathcal{C}_f$ sur chaque intervalle $[2k\pi; (2k+1)\pi]$, $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$.

Devoir surveillé 3 Sujet 3 du 12/12/2025
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 3 pages

Exercice 1. Ecriricome 2015 ECS

1. On note pour tout $x \in I =]0; \frac{\pi}{2}[$:

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \text{ et } g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}$$

- (a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 1$.
(b) Factoriser le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.
(c) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.

Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.

- (d) En déduire les variations de u sur I .
(e) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.

Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$,

$$v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos(x))^2}.$$

- (f) En déduire les variations de v sur I .
(g) Montrer que :

$$\forall x \in I, g(x) < x < f(x).$$

2. (a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
(b) Déduire de la question 1g un encadrement de π .
3. On pose pour tout entier naturel n ,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \text{ et } b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

- (a) Justifier que pour tout réel θ ,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$

et en déduire que pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - b_n}{2}} (*) \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + b_n}{2}} (**)$$

- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

- (c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers l'infini.

Exercice 2.

On considère trois points distincts du plan nommés A , B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n), \quad b_n = P(B_n), \quad c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres a_n , b_n et c_n pour $n \in \{0, 1\}$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n . Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1} .
3. Soit $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $V_{n+1} = MV_n$.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
 - (a) Soit B telle que $A = I_3 + B$. Calculer B^2 . En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$M^n = \frac{1}{3 \times 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$

En déduire une expression de a_n , b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Déterminer les limites respectives des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .

Exercice 3.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 . Sinon le tirage se fait dans l'urne U_2 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement "la boule tirée au n -ième tirage est blanche". On pose également $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
3. En déduire pour tout entier naturel non nul, la valeur de p_n . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Exercice 4.

Une urne contient 1 boule noire et $n - 1$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2. On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise, le quatrième s'effectue avec remise... D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1. (a) Quel est le nombre de tirages effectués lors de cette épreuve ?
(b) Pour $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, combien reste-t-il de boules dans l'urne juste avant le $(2j - 1)$ -ième tirage ? Combien en reste-t-il juste avant le $(2j + 1)$ -ième tirage ? Combien en reste-t-il juste avant le $(2j)$ -ième tirage ?
2. On désigne par B_k l'évènement "le k -ième tirage donne une boule blanche" et N_k l'évènement "le k -ième tirage donne une boule noire".
(a) Calculer $P(N_1)$ et $P(N_2)$.
(b) Pour tout entier naturel $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, calculer $P(N_{2j+1})$ et $P(N_{2j})$.
3. Pour tout $j \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, on note U_j l'évènement "on obtient la boule noire pour la première fois au $(2j + 1)$ -ième tirage".
(a) En considérant l'état de l'urne juste avant le $(2n - 2)$ -ième tirage, montrer que $P(U_{n-1}) = 0$.
(b) Montrer que : $\forall j \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, P(U_j) = \frac{n - 1 - j}{n(n - 1)}$.
(c) Ecrire l'évènement A "on obtient une seule boule noire lors de cette épreuve" à l'aide des évènements U_j .
(d) Calculer $P(A)$.