

Devoir surveillé 4 Sujet 1 du 30/01/2026
Durée 3h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 3 pages

Exercice 1.

On considère les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M_{a,b} = aA + bB$.

On note E l'ensemble des matrices $M_{a,b}$, c'est à dire :

$$E = \{M_{a,b} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{aA + bB, \text{ tq } a, b \in \mathbb{R}\}$$

Partie 1

1. Justifier rapidement que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dont (A, B) est une base.

Vue la définition de E comme ensemble des combinaisons linéaires de A et B , il est évident que E est le sous-espace de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ engendré par A et B , donc est un espace vectoriel.

$$E = \text{Vect}(A, B)$$

Donc (A, B) est une famille génératrice de E . De plus les deux matrices ne sont pas colinéaires donc c'est une famille libre et donc une base de E .

2. Ecrire les matrices suivantes comme combinaison linéaire de A et B :

$$A^2, AB, BA, B^2.$$

On trouve successivement :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2A \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A - B$$

ainsi que :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2B \quad B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = A \times B = 2B$$

3. (a) Est-ce que le produit de deux éléments de E appartient à E ?

On en déduit que le produit de deux éléments $M = aA + bB$ et $N = a'A + b'B$ de E vaut :

$$M \times N = aa'A^2 + ab'AB + ba'BA + bb'B^2 = (2aa' + bb')A + (2(ab' + ba') - bb')B \quad (1)$$

et donc le produit de deux éléments de E appartient à E .

- (b) Est-ce que ce produit est commutatif ?

La formule (1) montre que l'on peut échanger a et a' ainsi que b et b' sans changer le résultat, et donc :

$$M \times N = N \times M$$

autrement dit le produit de deux éléments de E est commutatif.

Partie 2

On considère les deux matrices suivantes :

$$M_1 = A + B, \quad M_2 = A - 2B$$

1. (a) Calculer les matrices suivantes en fonction de M_1 et M_2 :

$$M_1^2, M_1M_2, M_2M_1, M_2^2$$

Il suffit d'appliquer la formule (1) :

$$M_1^2 = 3A + 3B = 3M_1 \quad M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1 = 0 \quad M_2^2 = 6A - 12B = 6M_2 \quad (2)$$

- (b) On cherche à montrer que (M_1, M_2) est une base de E .

- i. Exprimer A et B en fonction de M_1 et M_2 .

On remarque que :

$$A = \frac{1}{3}(2M_1 + M_2) \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{3}(M_1 - M_2)$$

- ii. En déduire que $E = \text{Vect}(M_1, M_2)$.

Soient $M = aA + bB$ un élément de E . On a :

$$M = a \times \frac{1}{3}(2M_1 + M_2) + b \times \frac{1}{3}(M_1 - M_2) = \frac{2a+b}{3}M_1 + \frac{a-b}{3}M_2$$

et donc la famille $\{M_1, M_2\}$ est *génératrice* puisque tout élément de E est combinaison linéaire de M_1 et M_2 .

- iii. Conclure.

Il est évident que M_1 et M_2 ne sont pas colinéaires car

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

donc la famille $\{M_1, M_2\}$ est *libre*.

On peut conclure que la famille $\{M_1, M_2\}$ est *une base* de E .

2. Soit $M_{a,b}$ une matrice de E telle que $(a, b) \neq (0, 0)$. (M_1, M_2) étant une base de E , il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M_{a,b} = xM_1 + yM_2$. Exprimer x et y en fonction de a et b .

Il suffit de procéder comme précédemment :

$$M_{a,b} = \frac{2a+b}{3}M_1 + \frac{a-b}{3}M_2$$

et on trouve :

$$x = \frac{2a+b}{3} \quad \text{et} \quad y = \frac{a-b}{3} \quad (3)$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Calculer M_1^n et M_2^n .

On se base sur les égalités (2) pour poser la propriété de récurrence suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}(n) : \ll M_1^n = 3^{n-1}M_1 \quad \text{et} \quad M_2^n = 6^{n-1}M_2 \gg .$$

- Initialisation :
 $3^{1-1}M_1 = M_1$ et $6^{1-1}M_2 = M_2$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité :
 Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
 M_1^{n+1} &= M_1^n \times M_1 \\
 &= 3^{n-1}M_1 \times M_1 \text{ par hypothèse de récurrence} \\
 &= 3^{n-1} \times 3M_1 \text{ par la relation } M_1^2 = 3M_1 \\
 &= 3^n M_1
 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
 M_2^{n+1} &= M_2^n \times M_2 \\
 &= 6^{n-1}M_2 \times M_2 \text{ par hypothèse de récurrence} \\
 &= 6^{n-1} \times 6M_2 \text{ par la relation } M_2^2 = 6M_2 \\
 &= 6^n M_2
 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion :
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, M_1^n = 3^{n-1} M_1 \text{ et } M_2^n = 6^{n-1} M_2$ (4)

- (b) En déduire l'expression de $M_{a,b}^n$ en fonction de n, a, b, M_1, M_2 .

On montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (xM_1 + yM_2)^n = x^n M_1^n + y^n M_2^n.$$

- Initialisation :
 Le résultat est vrai pour $n = 1$ car $x^1 = x$ et $y^1 = y$.
- Hérédité :
 Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
 (xM_1 + yM_2)^{n+1} &= (xM_1 + yM_2) \times (xM_1 + yM_2)^n \\
 &\stackrel{(\text{HDR})}{=} (xM_1 + yM_2) \times (x^n M_1^n + y^n M_2^n) \\
 &= x^{n+1} M_1^{n+1} + xy^n M_1 M_2 \times M_2^{n-1} \\
 &\quad + yx^n M_2 M_1 \times M_1^{n-1} + y^{n+1} M_2^{n+1} \\
 &\stackrel{(2)}{=} x^{n+1} M_1^{n+1} + y^{n+1} M_2^{n+1}
 \end{aligned}$$

Les formules (3) et (4) donnent alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_{a,b}^n = \frac{1}{3}(2a+b)^n M_1 + \frac{1}{6}(2a-2b)^n M_2 \quad (5)$$

- (c) On pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M_{a,b}^k.$$

Montrer qu'il existe deux réels λ_n et μ_n tels que $S_n = I_3 + \lambda_n M_1 + \mu_n M_2$ et déterminer leur expression.

- La matrice $S_n - I_3$ est une combinaison linéaire de puissances de matrices de E donc d'éléments de E et par les questions précédentes est une combinaison linéaire de M_1 et M_2 , ce qui prouve l'existence de λ_n et μ_n .

— La formule (5) donne les formules :

$$\lambda_n = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{(2a+b)^k}{k!}$$

et

$$\mu_n = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{(2a-2b)^k}{k!}$$

Exercice 2.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x^2)$. Déterminer le domaine de définition, de dérivabilité et la dérivée de f .

f est définie ssi $1+x^2 > 0$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx.$$

1. Calculer I_0 .

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln(2) - 0 \\ &= \frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

2. (a) Calculer $I_0 + I_1$

$$\begin{aligned} I_0 + I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- (b) En déduire I_1

$$\text{Ainsi } I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2} = \frac{1 - \ln(2)}{2}$$

3. Montrer que $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$

$$\begin{aligned}
 I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{1+x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^{2n+1} + x^{2n+3}}{1+x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(1+x^2)}{1+x^2} dx \\
 &= \int_0^1 x^{2n+1} dx \\
 &= \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2n+2}
 \end{aligned}$$

4. A l'aide de l'égalité précédente, écrire un programme **Python** permettant prenant en entrée n et renvoyant I_n .

Avec la relation précédente on peut en déduire que $I_k = \frac{1}{2k} - I_{k-1}$

```

1 import numpy as np
2 def I(n):
3     res=np.log(2)/2
4     for k in range(1,n+1):
5         res=1/(2*k)-I
6     return res

```

5. Prouver que pour tout entier naturel n , on a

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{x^{2n+1}}{1+x^2} \geq 0$ donc $I_n \geq 0$ par positivité de l'intégrale. Donc $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$, donc $I_n = \frac{1}{2n+2} - I_{n+1}$. Or $I_{n+1} \geq 0$ ainsi $I_n \leq \frac{1}{2n+2}$.
Donc

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$$

6. Etudier la convergence de la suite (I_n) et préciser sa limite.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+2} = 0$ donc par le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$. Donc (I_n) converge vers 0.

Soit (S_n) la suite définie par, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2)$$

Raisonnons par récurrence et notons $P_n : \ll 2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \gg$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation $2(-1)^{1-1}I_1 = 1 - \ln 2$ d'après la question 2.b et $\sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 = 1 - \ln 2$ donc P_1 est vraie.

- Hérédité : Supposons que pour un rang n non nul on ait $2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$.

Alors,

$$2(-1)^n I_{n+1} \stackrel{q3}{=} 2(-1)^n \left(\frac{1}{2n+2} - I_n \right) = 2(-1)^{n+1} I_n + 2(-1)^n \frac{1}{2n+2}$$

Or $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} 2(-1)^n I_{n+1} &= 2(-1)^{n-1} I_n + \frac{(-1)^{n+1-1}}{n+1} \\ 2(-1)^n I_{n+1} &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 + \frac{(-1)^{n+1-1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \end{aligned}$$

- Conclusion : Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2)$$

- (b) En déduire que (S_n) converge et sa limite.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(-1)^n I_n = 0$. Donc par la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$. Donc (S_n) converge vers $\ln(2)$.

2. Proposer un programme **Python**, prenant n en entrée et renvoyant la valeur de I_n .*

Utilisons la question 1a : $I_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2}(S_n - \ln(2))$

```

1 import numpy as np
2 def I(n):
3     S=0
4     for k in range(1,n+1):
5         S=S+(-1)**(k-1)/k
6     res=((-1)**(n-1)/2)*(S-np.log(2))
7     return res

```

3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx$$

Posons $\begin{cases} u' = x^{2n+1} \\ v = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \\ v' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \end{cases}$: u et v étant C^1 , par intégrations par parties il

vient :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2n+2} \left[\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \right]_0^1 - \frac{-2}{2n+2} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \\ I_n &= \frac{1}{2} \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \end{aligned}$$

(b) Prouver que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{1}{2n+4}$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{x^{2n+3}}{1+x^2} \leq x^{2n+3}$. Par intégration,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n+3} dx = \left[\frac{x^{2n+4}}{2n+4} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+4}$$

Exercice 3. [Questions en vrac]

1. On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$

(a) On considère la famille constituée des polynômes

$$P_1 = X^2 + X, \quad P_2 = X + 1 \text{ et } P_3 = X^2 - X + 2$$

i. Montrer que la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de E . On doit montrer que la famille est libre et génératrice de E .

— Montrons que la famille est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_E.$$

Montrons que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_E &\iff \lambda_1(X^2 + X) + \lambda_2(X + 1) + \lambda_3(X^2 - X + 2) = 0_E \\ &\iff (\lambda_1 + \lambda_3)X^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)X + (\lambda_2 + 2\lambda_3) = 0_E \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = 2\lambda_3 \\ 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est donc libre.

— Montrons que la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est génératrice de E . Soit $P \in E$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P = aX^2 + bX + c$. On cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = P.$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = P &\iff \lambda_1(X^2 + X) + \lambda_2(X + 1) + \lambda_3(X^2 - X + 2) = P \\
&\iff (\lambda_1 + \lambda_3)X^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)X + (\lambda_2 + 2\lambda_3) = aX^2 + bX + c \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = b \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = c \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 = a - \lambda_3 \\ a + \lambda_2 - 2\lambda_3 = b \quad (L2) \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = c \quad (L3) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 = a - \lambda_3 \\ a + 2\lambda_2 = b + c \quad (L2 + L3) \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = c \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 = a - \lambda_3 \\ \lambda_2 = \frac{b+c-a}{2} \\ \lambda_3 = \frac{c-\lambda_2}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3a+b-c}{4} \\ \lambda_2 = \frac{c+b-a}{2} \\ \lambda_3 = \frac{c-b+a}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a écrit $P \in E$ comme combinaison linéaire des polynômes de la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$, elle est donc génératrice de E .

Ainsi, la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de E .

ii. Déterminer les coordonnées de $P_4 = 2X^2 - 2X + 1$ dans cette base.

On pose $a = 2$, $b = -2$ et $c = 1$, on obtient alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{3a+b-c}{4} \\ \lambda_2 = \frac{c+b-a}{2} \\ \lambda_3 = \frac{c-b+a}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{6-2-1}{4} \\ \lambda_2 = \frac{1-2-2}{2} \\ \lambda_3 = \frac{1+2+2}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{4} \\ \lambda_2 = \frac{-3}{2} \\ \lambda_3 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

donc les coordonnées de P_4 dans la base (P_1, P_2, P_3) sont $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

(b) On considère l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = P(1)\}$.

i. Montrer que F est un espace vectoriel. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E .

— On a $F \subset E$ par définition

— On considère le polynôme nul, noté 0_E . On a $0_E(1) = 0$ et $0_E(0) = 0$ donc $0_E(1) = 0_E(0)$ et par conséquent $0_E \in F$.

— Soient P et $Q \in F$, soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda P + \mu Q \in F$.

$$\begin{aligned}
(\lambda P + \mu Q)(1) &= \lambda \underbrace{P(1)}_{P(0) \text{ car } P \in F} + \mu \underbrace{Q(1)}_{Q(0) \text{ car } Q \in F} \\
&= \lambda P(0) + \mu Q(0) \\
&= (\lambda P + \mu Q)(0)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda P + \mu Q \in F$ et F est stable par combinaison linéaire.

F est donc un sous-espace vectoriel de E .

ii. Déterminer une base de F .

Déterminons une base de F .

— On détermine dans un premier temps une faille génératrice de F .

Soit $P \in F$, soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$.

$$\begin{aligned} P \in F &\iff P(1) = P(0) \\ &\iff a + b + c = c \\ &\iff a = -b \\ &\iff P = -bX^2 + bX + c \\ &\iff P = b \underbrace{(-X^2 + X)}_{P_5} + c \underbrace{(1)}_{P_6} \end{aligned}$$

donc la famille $\{P_5, P_6\}$ est génératrice de F .

— Les polynômes P_5 et P_6 sont de degrés distincts, donc ils forment une famille libre.

Ainsi, la famille $\{P_5, P_6\}$ est une base de F .

iii. Démontrer que $P_4 = 2X^2 - 2X + 1 \in F$ et déterminer ses coordonnées dans la base de la question précédente. On a $P_4 \in E$ car ce polynôme est de degré 2. De plus, $P_4(0) = 1$ et $P_4(1) = 2 - 2 + 1 = 1$ donc $P_4(0) = P_4(1)$. Par conséquent, $P_4 \in F$.

On remarque que $P_4 = 2X^2 - 2X + 1 = -2 \times \underbrace{(-X^2 + X)}_{P_5} + 1 \times \underbrace{(1)}_{P_6} = -2P_5 + 1P_6$, donc les

coordonnées de P_4 dans la base (P_5, P_6) sont $(-2, 1)$.

2. Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note F l'ensemble des éléments M de E tels que :

$$AM = MD$$

Montrer que F est un espace vectoriel et en déterminer une base.

Soient x, y, z, t des réels et

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

On a :

$$AM = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MD = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

Donc $AM = MD$ si et seulement si

$$z = 0 \quad \text{et} \quad y = t$$

Donc $M \in F \iff M = \begin{pmatrix} x & t \\ 0 & t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $F = \text{Vect}(U, A)$. Les matrices A et U n'étant pas colinéaires, elles forment une famille libre, donc une base de F .