

Devoir surveillé 4 Sujet 2 du 30/01/2026
Durée 3h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 3 pages

Exercice 1.

On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0_n$ et $A^2 = 0_n$.

1. Montrer qu'une telle matrice A existe (on donnera un exemple simple) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A^2 = 0_n$.

2. Montrer que A n'est pas inversible.

Supposons que A est inversible, alors il existe B telle que $AB = I_n$. Donc $A^2B = AAB = AI_n = A$. Or $A^2 = 0_n$ donc $A = 0_n$ ce qui contredit la définition de A . A n'est donc pas inversible.

3. Justifier brièvement que $\mathcal{E} = \{\alpha I_n + \beta A \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ est un espace vectoriel dont (I_n, A) est une base.

Par définition $\mathcal{E} = \text{Vect}(I_n, A)$ Donc $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel dont (I_n, A) est une famille génératrice. De plus I_n et A ne sont pas colinéaires : sinon A serait inversible ou nulle. Donc la famille étant composée de deux matrices elle est libre et c'est donc un base.

Donnons-nous $B \in \mathcal{E}$ dont les coordonnées dans la base (I_n, A) sont les réels α, β . C'est-à-dire, $B = \alpha I_n + \beta A$.

1. (a) Montrer que $B^2 = 2\alpha B - \alpha^2 I_n$. En déduire un polynôme annulateur de B .

$$\begin{aligned} B^2 &= (\alpha I_n + \beta A)^2 \\ &= \alpha^2 I_n + 2\alpha\beta A + \beta^2 A^2 \text{ par le binôme de Newton car } AI_n = I_n A \\ &= \alpha^2 I_n + 2\alpha\beta A \text{ car } A^2 = 0 \\ &= \alpha^2 I_n + 2\alpha(B - \alpha I_n) \text{ car } \beta A = 2\alpha B - \alpha I_n \\ &= 2\alpha B - \alpha^2 I_n \end{aligned}$$

Ainsi $X^2 - \alpha X + \alpha^2$ est un polynôme annulateur de B .

- (b) Supposons que $\alpha \neq 0$. En déduire que B est inversible. Remarquer alors que B^{-1} appartient encore à $\mathcal{E}$ et exprimer la matrice de ses coordonnées dans la base (I_n, A) .

On sait que $B^2 = 2\alpha B - \alpha^2 I_n$, alors donc $B^2 - 2\alpha B = -\alpha^2 I_n$ Ainsi

$$B(2\alpha I_n - B) = \alpha^2 I_n$$

Donc si $\alpha \neq 0$, on a donc

$$B \times \frac{1}{\alpha^2} (2\alpha I_n - B) = I_n$$

B est donc inversible d'inverse $\frac{1}{\alpha^2}(2\alpha I_n - B)$. Ainsi

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{1}{\alpha^2}(\alpha I_n - B) \\ &= \frac{1}{\alpha^2}(2\alpha I_n - (\alpha I_n + \beta A)) \\ &= \frac{1}{\alpha^2}(\alpha I_n - \beta A) \\ &= \frac{1}{\alpha}I_n - \frac{\beta}{\alpha}A \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

(c) Montrer que si $\alpha = 0$, alors B n'est pas inversible.

Si $\alpha = 0$, alors $B^2 = 0$ donc pour les mêmes raisons que pour A , B n'est pas inversible.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer B^p . Remarquer que B^p appartient encore à E et déterminer ses coordonnées dans la base (I_n, A) .

$B = \alpha I_n + \beta A$. Or $I_n A = A I_n = A$. Donc par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} B^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (\beta A)^k (\alpha I_n)^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \alpha^{p-k} \beta^k A^k \\ &= \binom{p}{0} \alpha^p I_n + \binom{p}{1} \alpha^{p-1} \beta A + \sum_{k=2}^p \binom{p}{k} \alpha^{p-k} \beta^k A^k \\ &= \binom{p}{0} \alpha^p I_n + \binom{p}{1} \alpha^{p-1} \beta A + 0 \text{ car } A^k = 0 \forall k \geq 2 \\ &= \alpha^p I_n + p \alpha^{p-1} \beta A \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Posons $S_p = \sum_{k=0}^p B^k$.

(a) Supposons que $\alpha = 1$. Justifier que $S_p \in \mathcal{E}$ et déterminer ses coordonnées dans la base (I_n, A) .

Si $\alpha = 1$, alors $B^p = I_n + p\beta A$, donc

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{k=0}^p B^k \\ &= \sum_{k=0}^p I_n + k\beta A \\ &= \sum_{k=0}^p I_n + \left(\sum_{k=0}^p k \right) \beta A \\ &= (p+1)I_n + \frac{p(p+1)}{2} \beta A \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

(b) Supposons que $\alpha \neq 1$. Montrer que $S_p = f_p(\alpha)I_n + \beta f'_p(\alpha)A$, où f_p est une fonction dérivable que $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (que l'on explicitera sous forme d'une fraction rationnelle).

Si $\alpha \neq 1$, alors

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{k=0}^p B^k \\ &= \sum_{k=0}^p \alpha^k I_n + k \alpha^{k-1} \beta A \\ &= \left(\sum_{k=0}^p \alpha^k \right) I_n + \beta \left(\sum_{k=0}^p k \alpha^{k-1} \right) A \end{aligned}$$

Donc $S_p = f_p(\alpha)I_n + \beta f'_p(\alpha)A$ avec $f_p(\alpha) = \sum_{k=0}^p \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{p+1}}{1 - \alpha}$

(c) Expliciter $f'_p(\alpha)$ sous forme de fraction lorsque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Alors

$$\begin{aligned} f'_p(\alpha) &= \frac{-(p+1)\alpha^p(1-\alpha) + (1-\alpha^{p+1})}{(1-\alpha)^2} \\ &= \frac{-(p+1)\alpha^p + (p+1)\alpha^{p+1} + 1 - \alpha^{p+1}}{(1-\alpha)^2} \\ &= \frac{1 + p\alpha^{p+1} - (p+1)\alpha^p}{(1-\alpha)^2} \end{aligned}$$

Exercice 2.

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0 , u_1 et u_2 .

$$u_0 = (1+1) = 2$$

$$u_1 = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$$

$$u_2 = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}$$

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.

$$u_n = 2 \times \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right). \text{ Or } 1 + \frac{1}{2^k} \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1 \text{ donc } u_n \geq 2.$$

(b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$\text{Donc } u_{n+1} \geq u_n \text{ car } 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \geq 1 \text{ et } u_n \geq 0.$$

3. (a) Etablir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , on a $\ln(1+x) \leq x$.

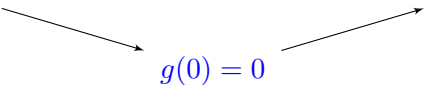
Soit la fonction $g : x \mapsto x - \ln(1+x)$. g est dérivable sur $] -1, +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont, et :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 g'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1+x} \\
 &\Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{1+x} \\
 &\Leftrightarrow 1 \leq 1+x \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq x
 \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variations suivant pour g :

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g			

On a donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x > -1$. Soit $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$.

(b) En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.

$$\begin{aligned}
 \ln(u_n) &= \ln \left(\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k} \right) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^k} \right) \\
 &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \\
 &\leq \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &\leq 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\
 &\leq 2
 \end{aligned}$$

Donc la suite $(\ln(u_n))$ est majorée par 2.

4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) \leq 2$, donc $u_n \leq e^2$. Ainsi (u_n) est croissante et majorée (par e^2). Par le théorème de convergence monotone, (u_n) converge. Soit ℓ sa limite. Alors comme (u_n) est croissante et majorée par e^2 , on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2 \leq u_n \leq e^2$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on a :

$$2 \leq \ell \leq e^2$$

Exercice 3.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$u_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} \, dt \text{ et pour tout } n \geq 1, u_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} \, dt.$$

1. Soit f la fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = (1+t)^{3/2}$.

(a) Déterminer la fonction dérivée f' de f .

La fonction f est dérivable comme composée de la fonction polynomiale $t \mapsto 1+t$ et de la fonction $t \mapsto t^{\frac{3}{2}}$, dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

On applique la formule de dérivation des fonctions composées :

$$f'(x) = \frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) En déduire la valeur de u_0 .

On déduit de la question précédente qu'une primitive de $\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}$. On obtient donc :

$$u_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} \, dt = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

2. (a) Établir pour tout entier naturel n , l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

Sur $[0, 1]$, on a $\sqrt{1+t} \leq 2$, d'où par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} \, dt \\ &\leq \int_0^1 t^n \sqrt{2} \, dt \\ &\leq \sqrt{2} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}. \end{aligned}$$

De plus, sur $[0, 1]$, $t^n \sqrt{1+t} \geq 0$, donc par positivité de l'intégrale, on a $u_n \geq 0$.
On obtient ainsi

$$0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente. Donner sa limite.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0$. Par théorème d'encadrement, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3. (a) Établir pour tout entier naturel n , à l'aide d'une intégration par parties, la relation suivante :

$$u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 (t^n + t^{n+1}) \sqrt{1+t} \, dt$$

On pose $u = t^{n+1}$, $v' = \sqrt{1+t}$, on a $u' = (n+1)t^n$ et $v = \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}$. Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ donc on peut procéder à l'IPP.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_0^1 t^{n+1} \sqrt{1+t} \, dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{n+1} (1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2(n+1)}{3} t^n (1+t)^{\frac{3}{2}} \, dt \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2(n+1)}{3} \int_0^1 t^n (1+t) \sqrt{1+t} \, dt \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2(n+1)}{3} \int_0^1 (t^n + t^{n+1}) \sqrt{1+t} \, dt \end{aligned}$$

- (b) En déduire pour tout entier naturel n la relation suivante : $u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n}{2n+5}$.
D'après la question précédente, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2(n+1)}{3} \int_0^1 (t^n + t^{n+1}) \sqrt{1+t} \, dt \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2(n+1)}{3} (u_{n+1} + u_n) \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{3}(n+1)\right) u_{n+1} &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1)u_n \\ \Leftrightarrow (2n+5)u_{n+1} &= 4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &= \frac{4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n}{2n+5} \end{aligned}$$

4. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 t^{n+1} \sqrt{1+t} \, dt - \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} \, dt \\ &= \int_0^1 \underbrace{t^n}_{\geq 0} \underbrace{(t-1)}_{\leq 0} \underbrace{\sqrt{1+t}}_{\geq 0} \, dt \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

par positivité de l'intégrale.

- (b) En déduire pour tout entier naturel n , à l'aide de la question 3.b, l'inégalité suivante : $u_n \geq \frac{4\sqrt{2}}{4n+7}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n}{2n+5} - u_n \text{ par question 3-b} \\ &= \frac{4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n - (2n+5)u_n}{2n+5} \\ &= \frac{4\sqrt{2} - (4n+7)u_n}{2n+5} \end{aligned}$$

donc la décroissance de (u_n) donne

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n \leq 0 &\iff \frac{4\sqrt{2} - (4n+7)u_n}{2n+5} \leq 0 \\
 &\iff \frac{4\sqrt{2}}{2n+5} \leq \frac{(4n+7)u_n}{2n+5} \\
 &\iff 4\sqrt{2} \leq (4n+7)u_n \\
 &\iff \frac{4\sqrt{2}}{4n+7} \leq u_n
 \end{aligned}$$

- (c) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} \leq \frac{4\sqrt{2}}{4n+7}$.

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
 u_n \geq \frac{4\sqrt{2}}{4n-7} &\iff -2(n+1) u_n \leq \frac{-8(n+1)\sqrt{2}}{4n+7} \\
 &\iff \frac{4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n}{2n+5} \leq \frac{4\sqrt{2} - \frac{8(n+1)\sqrt{2}}{4n+7}}{2n+5} \\
 &\iff u_{n+1} \leq \frac{4\sqrt{2}[(4n+7) - 2(n+1)]}{(2n+5)(4n+7)} \\
 &\iff u_{n+1} \leq \frac{4\sqrt{2}[2n+5]}{(2n+5)(4n+7)} \\
 &\iff u_{n+1} \leq \frac{4\sqrt{2}}{4n+7}
 \end{aligned}$$

- (d) Montrer que la suite $(nu_n)_{n \geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.

La question précédente nous donne au rang n :

$$u_n \leq \frac{4\sqrt{2}}{4(n-1)+7} = \frac{4\sqrt{2}}{4n+3}.$$

Si on utilise le résultat de la question 4-b), on obtient l'encadrement :

$$\frac{4\sqrt{2}}{4n+7} \leq u_n \leq \frac{4\sqrt{2}}{4n+3}.$$

On multiplie cette inéquation par $n \geq 0$, on obtient :

$$\frac{4n\sqrt{2}}{4n+7} \leq n u_n \leq \frac{4n\sqrt{2}}{4n+3}.$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n\sqrt{2}}{4n+7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{7}{4n}} = \sqrt{2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n\sqrt{2}}{4n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{3}{4n}} = \sqrt{2}.$$

Par théorème d'encadrement, on obtient alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = \sqrt{2}.$$

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel. Montrer que si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E . Alors

- $F \cap G \subset E$ car si $x \in F \cap G$ alors $x \in E$.
- $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont des sev de E donc $0_E \in F \cap G$. Donc $F \cap G \neq \emptyset$.
- Soient $u, v \in F \cap G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $u \in F$ et $u \in G$, $v \in F$ et $v \in G$.
Donc $\lambda u + \mu v \in F$ car F est un stable par combinaison linéaire. De même $\lambda u + \mu v \in G$ car G est stable par combinaison linéaire donc $\lambda u + \mu v \in F \cap G$. Donc $F \cap G$ est stable par combinaison linéaire.

Donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .