
Devoir surveillé 4 Sujet 1 du 30/01/2026
Durée 3h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 3 pages

Exercice 1.

On considère les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M_{a,b} = aA + bB$.

On note E l'ensemble des matrices $M_{a,b}$, c'est à dire :

$$E = \{M_{a,b} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{aA + bB, \text{ tq } a, b \in \mathbb{R}\}$$

Partie 1

1. Justifier rapidement que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dont (A, B) est une base.
2. Ecrire les matrices suivantes comme combinaison linéaire de A et B :

$$A^2, AB, BA, B^2.$$

3. (a) Est-ce que le produit de deux éléments de E appartient à E ?
(b) Est-ce que ce produit est commutatif ?

Partie 2

On considère les deux matrices suivantes :

$$M_1 = A + B, \quad M_2 = A - 2B$$

1. (a) Calculer les matrices suivantes en fonction de M_1 et M_2 :

$$M_1^2, M_1M_2, M_2M_1, M_2^2$$

- (b) On cherche à montrer que (M_1, M_2) est une base de E .
 - i. Exprimer A et B en fonction de M_1 et M_2 .
 - ii. En déduire que $E = \text{Vect}(M_1, M_2)$.
 - iii. Conclure.
2. Soit $M_{a,b}$ une matrice de E telle que $(a, b) \neq (0, 0)$. (M_1, M_2) étant une base de E , il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M_{a,b} = xM_1 + yM_2$. Exprimer x et y en fonction de a et b .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Calculer M_1^n et M_2^n .
 - (b) En déduire l'expression de $M_{a,b}^n$ en fonction de n, a, b, M_1, M_2 .
 - (c) On pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M_{a,b}^k.$$

Montrer qu'il existe deux réels λ_n et μ_n tels que $S_n = I_3 + \lambda_n M_1 + \mu_n M_2$ et déterminer leur expression.

Exercice 2.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x^2)$. Déterminer le domaine de définition, de dérivabilité et la dérivée de f .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx.$$

1. Calculer I_0 .
2. (a) Calculer $I_0 + I_1$
(b) En déduire I_1
3. Montrer que $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$
4. A l'aide de l'égalité précédente, écrire un programme **Python** permettant prenant en entrée n et renvoyant I_n .
5. Prouver que pour tout entier naturel n , on a

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$$

6. Etudier la convergence de la suite (I_n) et préciser sa limite.

Soit (S_n) la suite définie par, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2(-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2)$$

- (b) En déduire que (S_n) converge et sa limite.
2. Proposer un programme **Python**, prenant n en entrée et renvoyant la valeur de I_n .
3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I_n = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx$$

- (b) Prouver que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{1}{2n+4}$$

Exercice 3. [Questions en vrac]

1. On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$

(a) On considère la famille constituée des polynômes

$$P_1 = X^2 + X, \quad P_2 = X + 1 \text{ et } P_3 = X^2 - X + 2$$

i. Montrer que la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de E .

ii. Déterminer les coordonnées de $P_4 = 2X^2 - 2X + 1$ dans cette base.

(b) On considère l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = P(1)\}$.

i. Montrer que F est un espace vectoriel.

ii. Déterminer une base de F .

iii. Démontrer que $P_4 = 2X^2 - 2X + 1 \in F$ et déterminer ses coordonnées dans la base de la question précédente.

2. Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note F l'ensemble des éléments M de E tels que :

$$A M = M D$$

Montrer que F est un espace vectoriel et en déterminer une base.

Devoir surveillé 4 Sujet 2 du 30/01/2026
Durée 3h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 2 pages

Exercice 4.

On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0_n$ et $A^2 = 0_n$.

1. Montrer qu'une telle matrice A existe (on donnera un exemple simple)
2. Montrer que A n'est pas inversible.
3. Justifier brièvement que $\mathcal{E} = \{\alpha I_n + \beta A \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ est un espace vectoriel dont (I_n, A) est une base.

Donnons-nous $B \in \mathcal{E}$ dont les coordonnées dans la base (I_n, A) sont les réels α, β . C'est-à-dire, $B = \alpha I_n + \beta A$.

1. (a) Montrer que $B^2 = 2\alpha B - \alpha^2 I_n$. En déduire un polynôme annulateur de B .
(b) Supposons que $\alpha \neq 0$. En déduire que B est inversible. Remarquer alors que B^{-1} appartient encore à $\mathcal{E}$ et exprimer la matrice de ses coordonnées dans la base (I_n, A) .
(c) Montrer que si $\alpha = 0$, alors B n'est pas inversible.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer B^p . Remarquer que B^p appartient encore à $\mathcal{E}$ et déterminer ses coordonnées dans la base (I_n, A) .
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Posons $S_p = \sum_{k=0}^p B^k$.
(a) Supposons que $\alpha = 1$. Justifier que $S_p \in \mathcal{E}$ et déterminer ses coordonnées dans la base (I_n, A) .
(b) Supposons que $\alpha \neq 1$. Montrer que $S_p = f_p(\alpha)I_n + \beta f'_p(\alpha)A$, où f_p est une fonction dérivable que $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (que l'on explicitera sous forme d'une fraction rationnelle).
(c) Expliciter $f'_p(\alpha)$ sous forme de fraction lorsque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 5.

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0 , u_1 et u_2 .
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.
(b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .
3. (a) Etablir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , on a $\ln(1+x) \leq x$.
(b) En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.

Exercice 6.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$u_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t} \, dt \quad \text{et pour tout } n \geq 1, \quad u_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t} \, dt.$$

1. Déterminer u_0 .
2. (a) Établir pour tout entier naturel n , l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente. Donner sa limite.
3. (a) Établir pour tout entier naturel n , à l'aide d'une intégration par parties, la relation suivante :

$$u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 (t^n + t^{n+1}) \sqrt{1+t} \, dt$$

- (b) En déduire pour tout entier naturel n la relation suivante :

$$u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n}{2n+5}.$$

4. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
(b) En déduire pour tout entier naturel n , à l'aide de la question 3.b, l'inégalité suivante :

$$u_n \geq \frac{4\sqrt{2}}{4n+7}.$$

- (c) Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} \leq \frac{4\sqrt{2}}{4n+7}.$$

- (d) Montrer que la suite $(nu_n)_{n \geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel. Montrer que si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .