

Devoir surveillé 5 du 13/03/2026
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 4 pages

Exercice 1. (Questions en vrac)

1. Justifier la convergence des séries suivantes et les calculer.

(a) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+2)2^k}{k!}$

Soit $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(k+2)2^k}{k!}$. Alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(k+2)2^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k2^k}{k!} + 2 \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{(k-1)!} + 2 \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \\ &= \sum_{l=0}^n \frac{2^{l+1}}{l!} + 2 \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{2^{l+1}}{l!} + 2 \sum_{l=0}^n \frac{2^l}{l!} \\ &= 2 \sum_{l=0}^{n-1} \frac{2^l}{l!} + 2 \sum_{l=0}^n \frac{2^l}{l!} \end{aligned}$$

On reconnaît alors les sommes partielles de séries exponentielles ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ existe et la série est convergente avec :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+2)2^k}{k!} = 2e^2 + 2e^2 = 4e^2$$

(b) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k^2-2k)}{3^{k+1}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on regarde la somme partielle : $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(k^2-2k)}{3^{k+1}}$. Alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{3^{k+1}} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2 - k + k}{3^{k+1}} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2 - k}{3^{k+1}} - \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^{k+1}} \\ &= \frac{1}{3^3} \sum_{k=0}^n \frac{k^2 - k}{3^{k-2}} - \frac{1}{3^2} \sum_{k=0}^n \frac{k}{3^{k-1}} \end{aligned}$$

On reconnaît les sommes partielles de série géométrique dérivée première et de série géométrique dérivée seconde. Ainsi la série converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k^2 - 2k)}{3^{k+1}} = \frac{1}{3^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^3} - \frac{1}{3^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{2^3} - \frac{1}{2^2} = 0$$

(c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

On regarde la somme partielle : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$. On remarque que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Ainsi :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

On reconnaît une somme télescopique, ainsi :

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$ et donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

(a) Déterminer l'expression de (u_n) en fonction de n .

La suite (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$$x^2 = x - \frac{1}{4}$$

Soit

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

Ou encore $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. L'équation a donc une racine double : $\frac{1}{2}$. Il existe donc A et

$B \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (An + B)$.

Or

$$\begin{cases} u_0 = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 (A \times 0 + B) = B \\ u_1 = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 (A + B) = \frac{1}{2}(A + B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A + B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow B = A = 1$$

Ainsi $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (n + 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(b) La série de terme général u_n est-elle convergente ? Si oui calculer sa somme.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n+1}{2^n} \\ &= \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \end{aligned} \qquad \qquad \qquad = \frac{1}{2} \times \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

Ainsi u_n est une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques donc $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 2 = 2 + 2 = 4$$

3. On dispose d'un sac qui contient 6 billes rouges et 3 billes bleues. On effectue 4 tirages successifs avec remise dans ce sac. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de billes rouges obtenues lors de ces 4 tirages.

(a) Sans calculs, déterminer la loi de X et donner son espérance et sa variance.

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(4, 2/3)$.

Donc $X(\Omega) = \llbracket 0, 4 \rrbracket$ et $P(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$.

$E(X) = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ et $Var(X) = 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$.

- (b) En déduire $P(X = 2)$ sous la forme d'une fraction irréductible.

Par ce qui précède

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{4}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{2^2}{3^2} \times \frac{1}{3^2} \\ &= \frac{8}{3^3} = \frac{8}{27} \end{aligned}$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. On admet que $Y = 2^X$ et $Z = \binom{n}{X}$ sont des variables aléatoires réelles finies. Montrer par le calcul à l'aide du théorème de transfert, que $E(Y) = 2E(Z)$. On ne déterminera pas les lois de Y et Z au préalable.

$x \mapsto 2^x$ est bien définie sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(2^X) \\ &= \sum_{k=1}^n 2^k P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n 2^k \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^k \\ &= \frac{1}{n} \times 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} \\ &= \frac{2 \times (2^n - 1)}{n} \end{aligned}$$

De même $x \mapsto \binom{n}{x}$ est bien définie sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
 E(Z) &= E\left(\binom{n}{X}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P(X=k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \\
 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \times 1^{n-k} \right) - \binom{n}{0} 1^0 \times 1^n \\
 &= \frac{1}{n} ((1+1)^n - 1) \\
 &= \frac{2^n - 1}{n}
 \end{aligned}$$

Ainsi $E(Y) = 2E(Z)$.

5. Déterminer un équivalent le plus simple possible des suites suivantes :

$$(a) \quad u_n = \frac{\left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2 + n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0. \text{ Donc}$$

$$\bullet \quad 1 - e^{\frac{1}{n}} \sim \frac{-1}{n}$$

$$\bullet \quad \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$$\text{Ainsi } u_n \sim \frac{\frac{-1}{n} \times \frac{1}{n}}{n^3} = \frac{-1}{n^5}$$

$$(b) \quad v_n = \frac{n \ln\left(1 + \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) = 0. \text{ Donc}$$

$$\bullet \quad \ln\left(1 + \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \sim \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\bullet \quad \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$$\text{Ainsi } v_n \sim \frac{n \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$(c) \quad w_n = \frac{\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right) - 1}}{\tan(e^{1/n} - 1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1/n} - 1 = 0, \text{ donc } \tan(e^{1/n} - 1) \sim e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n}$$

$$\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right) - 1} = \sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{1}{n}\right) - 1} = 0. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^2\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right) - 1} &\sim \frac{1}{2} \left(\cos^2\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) + 1 \right) \\ &\sim \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} \right) \times 2\end{aligned}$$

Car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) + 1 = 2$. Donc

$$w_n \sim -\frac{1}{2n^2}$$

Problème 1.

Dans cet exercice x est un réel de $]0, 1[$ et n un entier naturel non nul.

Première partie

1. (a) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{x^n}{n}$. On appelle $A(x)$ sa somme.

Pour tout $x \in [0, 1[$, $\frac{x^n}{n} \geq 0$ et $\frac{x^n}{n} = o(x^n)$. Or $\sum x^n$ converge comme série géométrique de raison $x \in [0, 1[$. Donc $\sum \frac{x^n}{n}$ converge par critère de négligeabilité des séries à termes positifs.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in [0, x]$, calculer $\sum_{p=1}^n t^{p-1}$.

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^n t^{p-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} t^k \\ &= \frac{1 - t^n}{1 - t}\end{aligned}$$

En déduire, en intégrant le résultat précédent, que

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

Alors

$$\int_0^x \sum_{p=1}^n t^{p-1} dt = \int_0^x \frac{1 - t^n}{1 - t} dt$$

Soit

$$\sum_{p=1}^n \int_0^x t^{p-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

Et donc

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

- (c) Etablir que, pour tout $t \in [0, x]$: $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{x^n}{1-t}$.

Soit $t \in [0, x]$ alors $0 \leq t^x \leq x^n$ et donc $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{x^n}{1-t}$

En déduire la limite de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ quand n tend vers $+\infty$, puis que $A(x) = -\ln(1-x)$.

Par ce qui précède et par positivité de l'intégrale, on a :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{x^n}{1-t} dt$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{x^n}{1-t} dt &= x^n \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \\ &= x^n [-\ln(1-t)]_0^x \\ &= -x^n \ln(1-x)\end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -x^n \ln(1-x) = 0$ car $0 \leq x < 1$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$$

Et donc

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = -\ln(1-x)$$

2. (a) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{x^n}{n(n+1)}$. On appelle $B(x)$ sa somme.

Pour tout $n \geq 1$ $\frac{x^n}{n(n+1)} \geq 0$. De plus, $\frac{x^n}{n(n+1)} = o(x^n)$ et $\sum x^n$ converge comme série géométrique. Donc $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$ converge par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs.

(b) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

$$\begin{aligned}\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} &= \frac{1}{n(n+1)} \Leftrightarrow \frac{a(n+1) + bn}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

(c) Montrer que : $xB(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$.

On a :

$$\begin{aligned}xB(x) &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1} \\ &= x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \right) \text{ car ces deux séries convergent par l'étude de } A(x) \\ &= xA(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= x(-\ln(1-x)) - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \\ &= x(-\ln(1-x)) - (A(x) - x) \\ &= x(-\ln(1-x)) - (-\ln(1-x)) + x \\ &= x + (1-x)\ln(1-x)\end{aligned}$$

3. On considère le script Python ci-dessous

```

1 import numpy as np
2 def I(x,n):
3     S=0
4     for k in range(1,101):
5         S=S+((k*x/100)**n)/(1-(k*x/100))
6     S=S*x/100
7     return S
8
9 def approxA(x):
10    n=1
11    A=x
12    while I(x,n)>10**(-3):
13        n=n+1
14        A=A+x**n/n
15    print('une valeur approchée de A est:', A, 'obtenue pour n= ',n)
16    print('-ln(1-x)=',-np.log(1-x))

```

(a) On rappelle que, par somme de Riemann :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{x}{m} \sum_{k=1}^m f\left(\frac{kx}{m}\right) = \int_0^x f(t)dt$$

(En particulier, vrai pour $f : t \rightarrow \frac{t^n}{1-t}$)

Compléter les lignes 5 et 6 pour que la variable S contienne une valeur approchée de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

(b) Compléter les lignes 10, 11 et 13 pour que la variable A contienne une valeur approchée à 10^{-3} près de $A(x)$.

(c) Compléter la ligne 15 pour qu'elle affiche la valeur exacte de $A(x)$.

Deuxième partie

1. (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln(n)x^n$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln(n)x^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 x^{n/2} \ln(n)x^{n/2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (x^{1/2})^n \ln(n)(x^{1/2})^n \\
 &= 0 \times 0 \text{ par croissances comparées car } 0 \leq x^{1/2} < 1
 \end{aligned}$$

(b) En déduire la convergence de la série de terme général $\ln(n)x^n$

Par la question précédente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)x^n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln(n)x^n = 0$. Donc $\ln(n)x^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n)x^n \geq 0$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc par critère de négligeabilité des séries à termes positifs $\sum \ln(n)x^n$ converge.

On pose : $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln(k)x^k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k)x^k$

2. (a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}.$$

Pour tout $t \in [p, p+1]$ on a :

$$\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$$

Donc par positivité de l'intégrale :

$$\frac{1}{p+1} = \int_p^{p+1} \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{p} dt \leq \frac{1}{p}$$

En déduire que :

$$\sum_{p=2}^k \frac{1}{p} \leq \ln(k) \leq \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$$

Par ce qui précède si $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}$$

Ainsi en sommant pour p de 1 à $k-1$, on a :

$$\sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=1}^{k-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$$

Et donc par changement d'indice sur la première somme et par la relation de Chasles sur l'intégrale :

$$\sum_{p=2}^k \frac{1}{p} \leq \int_1^p \frac{1}{t} dt \leq \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$$

Soit

$$\sum_{p=2}^k \frac{1}{p} \leq \ln(k) \leq \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$$

puis que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$

Par ce qui précède : $\sum_{p=2}^k \frac{1}{p} \leq \ln(k) \leq \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$. Donc

$$\sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) = \frac{1}{k} + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p} - \ln(k) \geq \frac{1}{k}$$

Et

$$\sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) = 1 + \sum_{p=2}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$$

Ainsi

$$\frac{1}{k} \leq \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$$

(b) En déduire un équivalent simple de $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ quand n tend vers $+\infty$.

On a :

$$\frac{1}{k} \leq \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$$

Donc,

$$\frac{1}{k \ln(k)} \leq \frac{1}{\ln(k)} \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - 1 \leq \frac{1}{\ln(k)}$$

Or $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k \ln(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(k)} \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - 1 = 0$$

Soit

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(k)} \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} = 1$$

. Donc

$$\sum_{p=1}^k \frac{1}{p} \sim \ln(k)$$

(c) En déduire aussi que :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leq \sum_{k=1}^n x^k.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - \sum_{k=1}^n \ln(k) x^k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \right) x^k \end{aligned}$$

Donc comme

$$0 \leq \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$$

On a

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leq \sum_{k=1}^n x^k$$

(d) Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = 0$

Pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{1}{p} \leq 1$, donc

$$0 \leq x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq x^{n+1} \sum_{k=1}^n 1 = nx^n$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx^n = 0$ par croissances comparées. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = 0$$

(e) Montrer que

$$0 \leq \frac{1}{x-1} \left(\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - S_n(x) \leq \frac{x}{1-x}.$$

Par la question c)

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leq \sum_{k=1}^n x^k$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - S_n(x) &= \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{p} - S_n(x) \text{ par inversion des sommes} \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \sum_{k=p}^n x^k - S_n(x) \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} x^p \frac{1-x^{n-p+1}}{1-x} - S_n(x) \\ &= \frac{1}{1-x} \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} (x^p - x^{n+1}) \right) - S_n(x) \\ &= \frac{1}{1-x} \left(\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - S_n(x) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x^k &= x \frac{1-x^n}{1-x} \\ &\leq \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

Ainsi

$$0 \leq \frac{1}{x-1} \left(\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - S_n(x) \leq \frac{x}{1-x}.$$

(f) En déduire que :

$$0 \leq -\frac{\ln(1-x)}{1-x} - S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

En faisant la limite quand n tend vers $+\infty$ de l'inégalité précédente on obtient :

$$0 \leq \frac{1}{1-x} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} - \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

Et donc

$$0 \leq \frac{1}{1-x} A(x) - S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

Soit

$$0 \leq \frac{-\ln(1-x)}{1-x} - S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

Puis :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{S(x)}{\frac{1}{1-x} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right)}$$

On a

$$0 \leq \frac{-\ln(1-x)}{1-x} - S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

Soit

$$0 \leq \frac{\ln \left(\frac{1}{1-x} \right)}{1-x} - S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

Donc en divisant par $\frac{\ln \left(\frac{1}{1-x} \right)}{1-x}$, on obtient :

$$0 \leq 1 - \frac{S(x)}{\frac{1}{1-x} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right)} \leq \frac{x}{\ln \left(\frac{1}{1-x} \right)}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln \left(\frac{1}{1-x} \right)} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{S(x)}{\frac{1}{1-x} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right)} = 0$$

Soit

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{S(x)}{\frac{1}{1-x} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right)} = 1$$

Exercice 2.

On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (un cœur et un carreau). Un joueur tire des cartes successivement et sans remise dans ce jeu jusqu'à l'obtention d'un roi rouge.

On note X le nombre de tirages effectués. On note R_i l'évènement : "On obtient un roi rouge au i^{ieme} tirage".

1. (a) Déterminer $X(\Omega)$.

$X(\Omega) = \llbracket 1; 2n-1 \rrbracket$ car au mieux on a un roi dès le premier tirage et au pire on tire d'abord toutes les cartes sauf les 2 rois et le premier roi tiré est donc la $2n-1^{\text{eme}}$ carte.

- (b) Ecrire l'évènement $X = k$ à l'aide des évènements R_i et $\overline{R_i}$, $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

" $X = k$ " = " $\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \dots \cap \overline{R_{k-1}} \cap R_k$ "

- (c) Montrer que la loi de X est donnée par

$$\forall k \in \{1, \dots, 2n-1\}, P(X = k) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}.$$

Si $k = 1$ on a :

$$P(X = 1) = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$$

Si $2n-1 \leq k \leq 2$, on a :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \dots \cap \overline{R_{k-1}} \cap R_k) \\ &= P(\overline{R_1})P_{|\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \dots P_{|\overline{R_1} \cap \dots \cap \overline{R_{k-2}}}(\overline{R_{k-1}})P_{|\overline{R_1} \cap \dots \cap \overline{R_{k-1}}}(R_k) \\ &= \frac{2n-2}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-2} \times \dots \times \frac{2n-k}{2n-k+2} \times \frac{2}{2n-k+1} \end{aligned}$$

On a donc un produit télescopique. Et ainsi :

$$P(X = k) = \frac{(2n - k + 1)(2n - k)}{2n(2n - 1)} \times \frac{2}{2n - k + 1} = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$$

On remarque que la formule reste vraie pour $k = 1$. On a donc bien, pour tout $k \in \llbracket 1; 2n-1 \rrbracket$:

$$P(X = k) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$$

2. Calculer l'espérance de X .

Par définition :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} kP(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{2n-1} k \frac{2n - k}{n(2n - 1)} \\ &= \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{2nk}{n(2n - 1)} - \frac{k^2}{n(2n - 1)} \\ &= \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{2nk}{n(2n - 1)} - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{k^2}{n(2n - 1)} \\ &= \frac{2n}{n(2n - 1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k - \frac{1}{n(2n - 1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k^2 \\ &= \frac{2n}{n(2n - 1)} \frac{(2n - 1) \times 2n}{2} - \frac{1}{n(2n - 1)} \frac{(2n - 1) \times 2n \times (4n - 1)}{6} \\ &= 2n - \frac{2n(4n - 1)}{6n} \\ &= 2n - \frac{4n - 1}{3} \\ &= \frac{2n + 1}{3} \end{aligned}$$

Le joueur paie un euro chaque fois qu'il tire une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G la variable aléatoire égale au gain du joueur (ce gain peut être négatif, évidemment).

3. (a) Exprimer G en fonction de X .

$$G = \underbrace{a}_{\text{Gain dû au roi rouge}} - \underbrace{X}_{\text{Perte de 1 par carte tirée}} = a - X$$

(b) En déduire l'espérance de G .

Par linéarité de l'espérance on en déduit que :

$$E(G) = a - E(X) = a - \frac{2n + 1}{3} = \frac{3a - 2n - 1}{3}$$

- (c) Peut-on choisir $a \in \mathbb{N}$ pour que ce jeu soit équitable ? Vous discuterez suivant la valeur de n (16 ou 26).

Pour que le jeu soit équilibré il faut que l'espérance soit égale à 0. C'est-à-dire :

$$\frac{3a - 2n - 1}{3} = 0$$

Et donc

$$a = \frac{2n + 1}{3}$$

Si $n = 16$ cela donne $a = \frac{33}{3} = 11$. On peut donc prendre $a = 11$.

Si $n = 26$ cela donne $a = \frac{53}{3} \notin \mathbb{N}$. Il n'y a donc pas de solution entière.