

Devoir surveillé 5 du 13/03/2026  
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 5 pages

**Sujet à rendre avec la copie**

**Problème 1.** EDHEC Maths appro 2025

On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $]n, +\infty[$  par :

$$\forall x \in ]n, +\infty[, \quad f_n(x) = (x - n) \ln(x) - x \ln(x - n)$$

On considère aussi une fonction  $g$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1. (a) Dresser le tableau de variations de  $g$ , limites comprises

$g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $g'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} g'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 - \ln(x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \geq \ln(x) \\ &\Leftrightarrow e \geq x \end{aligned}$$

De plus  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  par croissances comparées et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ . On obtient donc le tableau de variations suivants :

|         |           |            |               |            |   |
|---------|-----------|------------|---------------|------------|---|
| $x$     | 0         | $e$        | $+\infty$     |            |   |
| $f'(x)$ |           | +          | 0             | −          |   |
| $f$     | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | 0 |

- (b) En déduire que la suite  $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$  est décroissante, puis que :

$$\forall k \geq 4, \quad \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}$$

Si  $k \geq 3$ , alors  $k \geq 1/e$ , donc  $g(k) \geq g(k+1)$  par le tableau de variation précédent. Ainsi la suite  $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$  est bien décroissante. On a donc, pour  $k \geq 4$  :

$$\frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(4)}{4} = \frac{2 \ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}$$

2. (a) Justifier que  $f_n$  est dérivable sur  $]n, +\infty[$  et donner l'expression de  $f'_n(x)$  pour tout réel  $x > n$ .

Pour tout  $x > n$ ,  $x - n > 0$  et  $x > 0$ , donc  $f_n$  est bien continue et dérivable sur  $]n, +\infty[$  comme produit et composée de fonctions qui le sont et

$$f'_n(x) = \ln(x) + \frac{x-n}{x} - \ln(x-n) - \frac{x}{x-n} = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{x-n}{x} - \frac{x}{x-n}$$

(b) Montrer que pour tout réel  $t > 0$ ,  $\ln(t) \leq t - 1$ .

Soit  $h : t \mapsto \ln(t) - (t - 1)$ . Alors  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_{+*}$  et  $h'(t) = \frac{1}{t} - 1$ . Donc  $h$  a le tableau de variations suivant :

|         |           |                         |           |
|---------|-----------|-------------------------|-----------|
| $x$     | 0         | 1                       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +                       | 0 -       |
| $f$     | $-\infty$ | $\nearrow$ 0 $\searrow$ | $-\infty$ |

On remarque donc que  $h(t) \leq 0$  pour tout  $t > 0$ . Donc  $\ln(t) \leq t - 1$  pour tout  $t > 0$

En déduire que  $f_n$  est strictement décroissante sur  $]n, +\infty[$ .

En appliquant l'inégalité précédente à  $f'_n$  on obtient :

$$\begin{aligned}
 f'_n(x) &\leq \frac{x}{x-n} - 1 + \frac{x-n}{x} - \frac{x}{x-n} \\
 &\leq -1 + \frac{x-n}{x} \\
 &\leq \frac{-x + x - n}{x} \\
 &\leq \frac{-n}{x} \leq 0
 \end{aligned}$$

La fonction  $f_n$  est donc bien décroissante.

(c) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$ , d'inconnue  $x \in [n+1, n+2]$ , admet une unique solution que l'on note  $x_n$ .

Soit  $n \geq 2$ ,

$$f_n(n+1) = \ln(n+1) - (n+1)\ln(1) = \ln(n+1) > 0$$

et

$$f_n(n+2) = 2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2)$$

Or par la question 1b, comme  $n \geq 2$ ,  $n+2 \geq 4$ , donc  $\frac{\ln(n+2)}{n+2} \leq \frac{\ln(2)}{2}$  soit  $f_n(n+2) \leq 0$ .

Ainsi  $f_n$  est continue, strictement décroissante de  $[n+1, n+2]$ , dans  $[f(n+2), f(n+1)]$ , par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection.

$0 \in [f(n+2), f(n+1)]$  donc l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution dans  $[n+1, n+2]$

3. Montrer l'équivalent suivant :  $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$ .

On sait que

$$n+1 \leq x_n \leq n+2$$

donc

$$\frac{n+1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{n+2}{n}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n} = 1$ . Donc par le théorème d'encadrement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$ .

Donc  $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$ .

4. (a) Justifier que :

$$\forall n \geq 2, \quad \ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}$$

$x_n$  est défini par  $f_n(x_n) = 0$ , donc  $(x_n - n) \ln(x_n) - x_n \ln(x_n - n) = 0$ . Soit

$$(x_n - n) \ln(x_n) = x_n \ln(x_n - n)$$

et donc

$$\ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}$$

(b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$  et en déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 1$ .

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$  car  $x_n \sim n$  donc par croissance comparées,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = 0$ .

On sait que  $1 \leq x_n - n \leq 2$ . Donc

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \leq (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n} = \ln(x_n - n) \leq 2 \frac{\ln(x_n)}{x_n}$$

Donc par le théorème d'encadrement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x_n - n) = 0$ , soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - n = 1$

5. On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  définie par :  $\forall n \geq 2, u_n = x_n - n - 1$ .

(a) Justifier que :

$$\ln(1 + u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n \text{ et } \ln(1 + n + u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . Donc  $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ .

De plus

$$\begin{aligned} \ln(1 + n + u_n) &= \ln \left( n \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{u_n}{n} \right) \right) \\ &= \ln(n) + \ln \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{u_n}{n} \right) \end{aligned}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} + \frac{u_n}{n} = 1$ , donc  $\ln \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{u_n}{n} \right) = o(\ln(n))$ . Donc

$$\ln(1 + n + u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

(b) Avec la question 4a, montrer alors que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

On a

$$u_n \sim \ln(1 + u_n)$$

$$u_n \sim \ln(x_n - n) \text{ par définition de } u_n$$

$$u_n \sim (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n} \text{ par la question 4a}$$

$$u_n \sim 1 \frac{\ln(1 + n + u_n)}{x_n}$$

$$u_n \sim \frac{\ln(n)}{n} \text{ par les équivalents montrés précédemment}$$

6. Déterminer la nature des séries de termes généraux  $u_n$  et  $u_n^2$ .

$\frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ , donc  $\frac{1}{n} = o(u_n)$ . Or  $\sum \frac{1}{n}$  diverge comme série harmonique. Donc par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs,  $\sum u_n$  diverge.\*

$$u_n^2 \sim \frac{\ln(n)^2}{n^2}.$$

$\ln(n)^2 = o(n^{1/2})$  par croissances comparées, donc  $\frac{\ln(n)^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ . Ainsi  $u_n^2 = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ .

Or  $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$  converge, donc par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs,  $\sum u_n^2$  converge.

## Problème 2.

Dans cet exercice  $x$  est un réel de  $]0, 1[$  et  $n$  un entier naturel non nul.

### Première partie

1. (a) Justifier la convergence de la série de terme général  $\frac{x^n}{n}$ . On appelle  $A(x)$  sa somme.

Pour tout  $x \in [0, 1[$ ,  $\frac{x^n}{n} \geq 0$  et  $\frac{x^n}{n} = o(x^n)$ . Or  $\sum x^n$  converge comme série géométrique de raison  $x \in [0, 1[$ . Donc  $\sum \frac{x^n}{n}$  converge par critère de négligeabilité des séries à termes positifs.

- (b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et pour tout  $t \in [0, x]$ , calculer  $\sum_{p=1}^n t^{p-1}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n t^{p-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} t^k \\ &= \frac{1 - t^n}{1 - t} \end{aligned}$$

En déduire, en intégrant le résultat précédent, que

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

Alors

$$\int_0^x \sum_{p=1}^n t^{p-1} dt = \int_0^x \frac{1 - t^n}{1 - t} dt$$

Soit

$$\sum_{p=1}^n \int_0^x t^{p-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

Et donc

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

- (c) Etablir que, pour tout  $t \in [0, x]$  :  $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{x^n}{1-t}$ .

Soit  $t \in [0, x]$  alors  $0 \leq t^x \leq x^n$  et donc  $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{x^n}{1-t}$

En déduire la limite de  $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , puis que  $A(x) = -\ln(1-x)$ .

Par ce qui précède et par positivité de l'intégrale, on a :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{x^n}{1-t} dt$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{x^n}{1-t} dt &= x^n \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \\ &= x^n [-\ln(1-t)]_0^x \\ &= -x^n \ln(1-x)\end{aligned}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -x^n \ln(1-x) = 0$  car  $0 \leq x < 1$ . Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$$

Et donc

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = -\ln(1-x)$$

2. (a) Justifier la convergence de la série de terme général  $\frac{x^n}{n(n+1)}$ . On appelle  $B(x)$  sa somme.

Pour tout  $n \geq 1$   $\frac{x^n}{n(n+1)} \geq 0$ . De plus,  $\frac{x^n}{n(n+1)} = o(x^n)$  et  $\sum x^n$  converge comme série géométrique. Donc  $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$  converge par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs.

(b) Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ .

$$\begin{aligned}\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} &= \frac{1}{n(n+1)} \Leftrightarrow \frac{a(n+1) + bn}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

(c) Montrer que :  $xB(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$ .

On a :

$$\begin{aligned}xB(x) &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1} \\ &= x \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \right) \text{ car ces deux séries convergent par l'étude de } A(x) \\ &= xA(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= x(-\ln(1-x)) - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \\ &= x(-\ln(1-x)) - (A(x) - x) \\ &= x(-\ln(1-x)) - (-\ln(1-x)) + x \\ &= x + (1-x)\ln(1-x)\end{aligned}$$

3. On considère le script Python ci-dessous

```

1 import numpy as np
2 def I(x,n):
3     S=0
4     for k in range(1,101):
5         S=S+((k*x/100)**n)/(1-(k*x/100))
6     S=S*x/100
7     return S
8
9 def approxA(x):
10     n=1
11     A=x
12     while I(x,n)>10**(-3):
13         n=n+1
14         A=A+x**n/n
15     print('une valeur approchée de A est:', A, 'obtenue pour n= ',n)
16     print('-ln(1-x)=',-np.log(1-x))

```

(a) On rappelle que, par somme de Riemann :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{x}{m} \sum_{k=1}^m f\left(\frac{kx}{m}\right) = \int_0^x f(t)dt$$

(En particulier, vrai pour  $f : t \rightarrow \frac{t^n}{1-t}$ )

Compléter les lignes 5 et 6 pour que la variable  $S$  contienne une valeur approchée de  $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

(b) Compléter les lignes 10, 11 et 13 pour que la variable  $A$  contienne une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $A(x)$ .

(c) Compléter la ligne 15 pour qu'elle affiche la valeur exacte de  $A(x)$ .

## Deuxième partie

1. (a) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln(n)x^n$ .

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln(n)x^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 x^{n/2} \ln(n)x^{n/2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (x^{1/2})^n \ln(n)(x^{1/2})^n \\
 &= 0 \times 0 \text{ par croissances comparées car } 0 \leq x^{1/2} < 1
 \end{aligned}$$

(b) En déduire la convergence de la série de terme général  $\ln(n)x^n$

Par la question précédente :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)x^n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln(n)x^n = 0$ . Donc  $\ln(n)x^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\ln(n)x^n \geq 0$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, donc par critère de négligeabilité des séries à termes positifs  $\sum \ln(n)x^n$  converge.

On pose :  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln(k)x^k$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k)x^k$

2. (a) Montrer que :  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}.$$

Pour tout  $t \in [p, p+1]$  on a :

$$\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$$

Donc par positivité de l'intégrale :

$$\frac{1}{p+1} = \int_p^{p+1} \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{p} dt \leq \frac{1}{p}$$

En déduire que :

$$\sum_{p=2}^k \frac{1}{p} \leq \ln(k) \leq \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$$

Par ce qui précède si  $p \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}$$

Ainsi en sommant pour  $p$  de 1 à  $k-1$ , on a :

$$\sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=1}^{k-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$$

Et donc par changement d'indice sur la première somme et par la relation de Chasles sur l'intégrale :

$$\sum_{p=2}^k \frac{1}{p} \leq \int_1^p \frac{1}{t} dt \leq \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$$

Soit

$$\sum_{p=2}^k \frac{1}{p} \leq \ln(k) \leq \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$$

puis que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$

Par ce qui précède :  $\sum_{p=2}^k \frac{1}{p} \leq \ln(k) \leq \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$ . Donc

$$\sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) = \frac{1}{k} + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p} - \ln(k) \geq \frac{1}{k}$$

Et

$$\sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) = 1 + \sum_{p=2}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$$

Ainsi

$$\frac{1}{k} \leq \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$$

(b) En déduire un équivalent simple de  $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On a :

$$\frac{1}{k} \leq \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$$

Donc,

$$\frac{1}{k \ln(k)} \leq \frac{1}{\ln(k)} \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - 1 \leq \frac{1}{\ln(k)}$$

Or  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k \ln(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} = 0$ . Donc par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(k)} \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - 1 = 0$$

Soit

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(k)} \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} = 1$$

. Donc

$$\sum_{p=1}^k \frac{1}{p} \sim \ln(k)$$

(c) En déduire aussi que :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leq \sum_{k=1}^n x^k.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - \sum_{k=1}^n \ln(k) x^k \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \right) x^k \end{aligned}$$

Donc comme

$$0 \leq \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$$

On a

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leq \sum_{k=1}^n x^k$$

(d) Etablir que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = 0$

Pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\frac{1}{p} \leq 1$ , donc

$$0 \leq x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq x^{n+1} \sum_{k=1}^n 1 = nx^n$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx^n = 0$  par croissances comparées. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = 0$$

(e) Montrer que

$$0 \leq \frac{1}{x-1} \left( \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - S_n(x) \leq \frac{x}{1-x}.$$

Par la question c)

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leq \sum_{k=1}^n x^k$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - S_n(x) &= \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{p} - S_n(x) \text{ par inversion des sommes} \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \sum_{k=p}^n x^k - S_n(x) \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} x^p \frac{1-x^{n-p+1}}{1-x} - S_n(x) \\ &= \frac{1}{1-x} \left( \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} (x^p - x^{n+1}) \right) - S_n(x) \\ &= \frac{1}{1-x} \left( \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - S_n(x) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x^k &= x \frac{1-x^n}{1-x} \\ &\leq \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

Ainsi

$$0 \leq \frac{1}{x-1} \left( \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - S_n(x) \leq \frac{x}{1-x}.$$

(f) En déduire que :

$$0 \leq -\frac{\ln(1-x)}{1-x} - S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

En faisant la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de l'inégalité précédente on obtient :

$$0 \leq \frac{1}{1-x} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} - \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

Et donc

$$0 \leq \frac{1}{1-x} A(x) - S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

Soit

$$0 \leq \frac{-\ln(1-x)}{1-x} - S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

Puis :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{S(x)}{\frac{1}{1-x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

On a

$$0 \leq \frac{-\ln(1-x)}{1-x} - S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

Soit

$$0 \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}{1-x} - S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

Donc en divisant par  $\frac{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}{1-x}$ , on obtient :

$$0 \leq 1 - \frac{S(x)}{\frac{1}{1-x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)} \leq \frac{x}{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)} = 0$ . Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - \frac{S(x)}{\frac{1}{1-x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)} = 0$$

Soit

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{S(x)}{\frac{1}{1-x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)} = 1$$

### Problème 3.

#### PARTIE 1 : Etude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est-à-dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant  $n$ . D'après le premier des deux points précédents, on a donc  $X_0 = 1$ .

1. Donner la loi de  $X_1$ , ainsi que l'espérance  $E(X_1)$  de la variable  $X_1$ .

La situation assure que  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 2, 4 \rrbracket)$  et donc  $E(X_1) = \frac{2+4}{2} = 3$ .

On admet pour la suite que la loi de  $X_2$  est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}; P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, déterminer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'ensemble des valeurs prises par  $X_n$ .

Soit pour  $n \geq 2$ ,  $\mathcal{P}(n)$  : " $X_n(\Omega) = \llbracket 1; 4 \rrbracket$ ".

Initialisation : Par l'énoncé le résultat est vrai pour  $n = 2$ .

Hérédité : Soit  $n \geq 2$ , supposons  $\mathcal{P}(n)$  vraie, alors

- $P(X_n = 1) > 0$  donc  $X_{n+1}$  peut prendre pour valeurs 2, 3 et 4.
  - $P(X_n = 2) > 0$  donc  $X_{n+1}$  peut prendre pour valeurs 1, 3 et 4.
- Ainsi  $X_{n+1}$  peut déjà prendre toutes les valeurs de  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ .  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.
- Conclusion : Pour tout  $n \geq 2$   $X_n(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ .

3. (a) Donner les valeurs de  $P_{X_n=i}(X_{n+1} = k)$  pour tous  $i, k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$

$$P_{X_n=i}(X_{n+1}=k) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } k \neq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Établir que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

La famille  $\{X_n = k\}_{k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$  forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=1}^4 P((X_{n+1} = 1) \cap (X_n = k)) \\ &= \sum_{k=1}^4 P(X_n = k) P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 1) \\ &= \sum_{k=2}^4 P(X_n = k) \times \frac{1}{3} + \text{car si la puce est en position 1 à l'étape } n, \text{ elle n'y retourne pas} \\ &= \frac{1}{3} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)) \end{aligned}$$

(c) Vérifier que cette relation reste valable pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

- Pour  $n = 0$  :  $P(X_1 = 1) = 0$  et  $\frac{1}{3}(P(X_0 = 2) + P(X_0 = 3) + P(X_0 = 4)) = 0$  car  $X_0 = 1$ .
- Pour  $n = 1$  :  $P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{3}(P(X_1 = 2) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4)) = \frac{1}{3}(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ .

(d) En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

Il suffit d'utiliser la relation  $P(X_n = 1) = 1 - (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$  dans la relation précédente, on a alors :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(1 - P(X_n = 1)) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

(e) Établir alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left( -\frac{1}{3} \right)^n$$

Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = P(X_n = 1)$ . Alors par ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}$$

La suite  $(u_n)$  est donc une suite arithmético-géométrique. On résout :

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3}x = \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

On pose alors la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - \frac{1}{4}$ . Alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{12} \\ &= -\frac{1}{3}\left(u_n - \frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)$  est géométrique de raison  $-\frac{1}{3}$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ . Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{3}{4}$$

Et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

4. Établir de la même façon que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Par le même type de raisonnement qu'à la question 3.a, on montre que

$$\forall n \geq 2, \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

qui est vraie aussi pour  $n = 0$  et  $n = 1$ . Et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = 2) = -\frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{3}$$

Ainsi si on pose  $v_n = P(X_n = 2)$  on a de nouveau une suite arithmético-géométrique avec les mêmes coefficients mais cette fois avec  $v_0 = 0$  (au lieu de 1), donc

$$v_n = P(X_n = 2) = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

5. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Les relations de récurrences des suites  $(P(X_n = 3))_n$  et  $(P(X_n = 4))_n$  sont les mêmes que celle de  $(v_n)$  et les conditions initiales sont également les mêmes. Ces 3 suites sont donc égales.

6. Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , l'espérance  $E(X_n)$  de la variable aléatoire  $X_n$ .

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=1}^4 kP(X_n = k) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + (2+3+4) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

## PARTIE 2 : Étude des puissances d'une matrice.

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on considère la matrice-ligne de  $M_{1,4}(\mathbb{R})$  :

$$U_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4))$$

1. (a) Montrer que, si l'on pose  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n A$ .

On a

$$\begin{aligned} U_n A &= (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4)) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) \quad P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) \quad \dots \quad \dots) \\ &= U_{n+1} \text{ par les relations 3.a et 4} \end{aligned}$$

(b) Établir par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 A^n$ .

Récurrence immédiate.

(c) En déduire la première ligne de  $A^n$ .

• Nous savons que  $U_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ , ainsi si l'on note  $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$ , nous

obtenons

$$U_0 A = (a_n \quad b_n \quad c_n \quad d_n)$$

• Or

$$\begin{aligned} U_n &= (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4)) \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \end{aligned}$$

• Ainsi la première ligne de la matrice  $A^n$  est

$$(a_n \quad b_n \quad b_n \quad b_n) \text{ où } \begin{cases} a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ b_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}$$

2. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice  $A^n$ , puis écrire ces trois lignes.
  - Pour avoir la deuxième ligne, il faudrait que  $U_0 = (0 \ 1 \ 0 \ 0)$  c'est-à-dire que le mobile soit initialement sur le sommet 2. On obtient comme ligne  $(b_n \ a_n \ b_n \ -n)$  avec les notations précédents.
  - Même principe pour les lignes 3 et 4 : au final on trouve que

$$A = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$