
Devoir surveillé 5 du 13/03/2026
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 4 pages

Exercice 1. (Questions en vrac)

1. Justifier la convergence des séries suivantes et les calculer.

(a) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+2)2^k}{k!}$

(b) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k^2-2k)}{3^{k+1}}$

(c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

(a) Déterminer l'expression de (u_n) en fonction de n .

(b) La série de terme général u_n est-elle convergente ? Si oui calculer sa somme.

3. On dispose d'un sac qui contient 6 billes rouges et 3 billes bleues. On effectue 4 tirages successifs avec remise dans ce sac. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de billes rouges obtenues lors de ces 4 tirages.

(a) Sans calculs, déterminer la loi de X et donner son espérance et sa variance.

(b) En déduire $P(X = 2)$ sous la forme d'une fraction irréductible.

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. On admet que $Y = 2^X$ et $Z = \binom{n}{X}$ sont des variables aléatoires réelles finies. Montrer par le calcul à l'aide du théorème de transfert, que $E(Y) = 2E(Z)$. *On ne déterminera pas les lois de Y et Z au préalable.*

5. Déterminer un équivalent le plus simple possible des suites suivantes :

(a) $u_n = \frac{\left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2 + n^3}$

(b) $v_n = \frac{n \ln\left(1 + \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$

(c) $w_n = \frac{\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)} - 1}{\tan(e^{1/n} - 1)}$

Problème 1.

Dans cet exercice x est un réel de $]0, 1[$ et n un entier naturel non nul.

Première partie

1. (a) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{x^n}{n}$. On appelle $A(x)$ sa somme.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in [0, x]$, calculer $\sum_{p=1}^n t^{p-1}$.

En déduire, en intégrant le résultat précédent, que

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

- (c) Etablir que, pour tout $t \in [0, x]$: $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{x^n}{1-t}$.

En déduire la limite de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ quand n tend vers $+\infty$, puis que $A(x) = -\ln(1-x)$.

2. (a) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{x^n}{n(n+1)}$. On appelle $B(x)$ sa somme.
 - (b) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
 - (c) Montrer que : $xB(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$.
3. On considère le script Python ci-dessous

```
1 import numpy as np
2 def I(x,n):
3     S=0
4     for k in range(1,101):
5         S=S+.....
6     S=S*.....
7     return S
8
9 def approxA(x):
10     n=1
11     A=....
12     while I(x,n).....:
13         n=n+1
14         A=A+.....
15     print('une valeur approchée de A est:', A, 'obtenue pour n= ',n)
16     print('-ln(1-x)=',.....)
```

- (a) On rappelle que, par somme de Riemann :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{x}{m} \sum_{k=1}^m f\left(\frac{kx}{m}\right) = \int_0^x f(t) dt$$

(En particulier, vrai pour $f : t \rightarrow \frac{t^n}{1-t}$)

Compléter les lignes 5 et 6 pour que la variable S contienne une valeur approchée de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

- (b) Compléter les lignes 10, 11 et 13 pour que la variable A contienne une valeur approchée à 10^{-3} près de $A(x)$.
- (c) Compléter la ligne 15 pour qu'elle affiche la valeur exacte de $A(x)$.

Deuxième partie

1. (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln(n) x^n$.

(b) En déduire la convergence de la série de terme général $\ln(n) x^n$

On pose : $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln(k) x^k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k) x^k$

2. (a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}.$$

En déduire que :

$$\sum_{p=2}^k \frac{1}{p} \leq \ln(k) \leq \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$$

puis que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$

(b) En déduire un équivalent simple de $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ quand n tend vers $+\infty$.

(c) En déduire aussi que :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leq \sum_{k=1}^n x^k.$$

(d) Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = 0$

(e) Montrer que

$$0 \leq \frac{1}{x-1} \left(\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - S_n(x) \leq \frac{x}{1-x}.$$

(f) En déduire que :

$$0 \leq -\frac{\ln(1-x)}{1-x} - S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

Puis :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{S(x)}{\frac{1}{1-x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

Exercice 2.

On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (un cœur et un carreau). Un joueur tire des cartes successivement et sans remise dans ce jeu jusqu'à l'obtention d'un roi rouge.

On note X le nombre de tirages effectués. On note R_i l'évènement : "On obtient un roi rouge au i^{ieme} tirage".

1. (a) Déterminer $X(\Omega)$.
- (b) Ecrire l'évènement $X = k$ à l'aide des évènements R_i et $\overline{R_i}$, $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.
- (c) Montrer que la loi de X est donnée par

$$\forall k \in \{1, \dots, 2n - 1\}, P(X = k) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}.$$

2. Calculer l'espérance de X .

Le joueur paie un euro chaque fois qu'il tire une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G la variable aléatoire égale au gain du joueur (ce gain peut être négatif, évidemment).

3. (a) Exprimer G en fonction de X .
- (b) En déduire l'espérance de G .
- (c) Peut-on choisir $a \in \mathbb{N}$ pour que ce jeu soit équitable? Vous discuterez suivant la valeur de n (16 ou 26).

Devoir surveillé 5 du 13/03/2026 Sujet 2
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 5 pages

Sujet à rendre avec la copie

Problème 1. EDHEC Maths appro 2025

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie sur $]n, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]n, +\infty[, \quad f_n(x) = (x - n) \ln(x) - x \ln(x - n)$$

On considère aussi une fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1. (a) Dresser le tableau de variations de g , limites comprises
- (b) En déduire que la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante, puis que :

$$\forall k \geq 4, \quad \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}$$

2. (a) Justifier que f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ et donner l'expression de $f'_n(x)$ pour tout réel $x > n$.
- (b) Montrer que pour tout réel $t > 0$, $\ln(t) \leq t - 1$.
En déduire que f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.
- (c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n + 1, n + 2]$, admet une unique solution que l'on note x_n .
3. Montrer l'équivalent suivant : $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
4. (a) Justifier que :

$$\forall n \geq 2, \quad \ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}$$

- (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 1$.
5. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2, u_n = x_n - n - 1$.

- (a) Justifier que :

$$\ln(1 + u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n \text{ et } \ln(1 + n + u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

- (b) Avec la question 4a, montrer alors que

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

6. Déterminer la nature des séries de termes généraux u_n et u_n^2 .

Problème 2.

Dans cet exercice x est un réel de $]0, 1[$ et n un entier naturel non nul.

Première partie

1. (a) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{x^n}{n}$. On appelle $A(x)$ sa somme.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in [0, x]$, calculer $\sum_{p=1}^n t^{p-1}$.

En déduire, en intégrant le résultat précédent, que

$$\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

- (c) Etablir que, pour tout $t \in [0, x]$: $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{x^n}{1-t}$.

En déduire la limite de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$ quand n tend vers $+\infty$, puis que $A(x) = -\ln(1-x)$.

2. (a) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{x^n}{n(n+1)}$. On appelle $B(x)$ sa somme.
 - (b) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
 - (c) Montrer que : $xB(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$.
3. On considère le script Python ci-dessous

```
1 import numpy as np
2 def I(x,n):
3     S=0
4     for k in range(1,101):
5         S=S+.....
6     S=S*.....
7     return S
8
9 def approxA(x):
10     n=1
11     A=....
12     while I(x,n).....:
13         n=n+1
14         A=A+.....
15     print('une valeur approchée de A est:', A, 'obtenue pour n= ',n)
16     print('-ln(1-x)=',.....)
```

- (a) On rappelle que, par somme de Riemann :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{x}{m} \sum_{k=1}^m f\left(\frac{kx}{m}\right) = \int_0^x f(t)dt$$

(En particulier, vrai pour $f : t \rightarrow \frac{t^n}{1-t}$)

Compléter les lignes 5 et 6 pour que la variable S contienne une valeur approchée de $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

- (b) Compléter les lignes 10, 11 et 13 pour que la variable A contienne une valeur approchée à 10^{-3} près de $A(x)$.
- (c) Compléter la ligne 15 pour qu'elle affiche la valeur exacte de $A(x)$.

Deuxième partie

1. (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln(n) x^n$.

(b) En déduire la convergence de la série de terme général $\ln(n) x^n$

On pose : $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln(k) x^k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k) x^k$

2. (a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}.$$

En déduire que :

$$\sum_{p=2}^k \frac{1}{p} \leq \ln(k) \leq \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}$$

puis que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} - \ln(k) \leq 1$

(b) En déduire un équivalent simple de $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ quand n tend vers $+\infty$.

(c) En déduire aussi que :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leq \sum_{k=1}^n x^k.$$

(d) Etablir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = 0$

(e) Montrer que

$$0 \leq \frac{1}{x-1} \left(\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \right) - S_n(x) \leq \frac{x}{1-x}.$$

(f) En déduire que :

$$0 \leq -\frac{\ln(1-x)}{1-x} - S(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

Puis :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{S(x)}{\frac{1}{1-x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

Problème 3.**PARTIE 1 : Etude d'une variable aléatoire**

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est-à-dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n . D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1 , ainsi que l'espérance $E(X_1)$ de la variable X_1 .

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3}; P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, déterminer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'ensemble des valeurs prises par X_n .
3. (a) Donner les valeurs de $P_{X_n=i}(X_{n+1} = k)$ pour tous $i, k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$
 (b) Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

- (c) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

- (d) En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

- (e) Établir alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n$$

4. Établir de la même façon que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n$$

5. On admet que, pour tout entier naturel n , on a :

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n$$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n .

PARTIE 2 : Étude des puissances d'une matrice.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $M_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4))$$

1. (a) Montrer que, si l'on pose $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n A$.
(b) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 A^n$.
(c) En déduire la première ligne de A^n .
2. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n , puis écrire ces trois lignes.