
Devoir surveillé 6 du 29/04/2026 Sujet 1
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 3 pages

Le sujet est à rendre avec la copie

Exercice 1.

Dans cet exercice, on note $E = \mathbb{R}^4$.

1. On note :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y + z + t = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - y + z - t = 0\}$$

(a) Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

$$\begin{aligned} u = (x, y, z, t) \in F &\Leftrightarrow x + y + z + t = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -y - z - t \\ &\Leftrightarrow u = (-y - z - t, y, z, t) \end{aligned}$$

Donc $F = \{(-y - z - t, y, z, t), \quad y, z, t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$.
Donc F est un sev de E .

$$\begin{aligned} u = (x, y, z, t) \in G &\Leftrightarrow x - y + z - t = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y - z + t \\ &\Leftrightarrow u = (y - z + t, y, z, t) \end{aligned}$$

Donc $G = \{(y - z + t, y, z, t), \quad y, z, t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$. Donc G est un sev de E .

(b) Donner les dimensions de F et de G .

Posons $f_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $f_2 = (-1, 0, 1, 0)$ et $f_3 = (-1, 0, 0, 1)$. Alors la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est génératrice de F . Montrons qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_E$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_E \iff \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

La famille est donc libre c'est donc une base de F . Donc $\dim F = 3$

De même posons $g_1 = (1, 1, 0, 0)$, $g_2 = (-1, 0, 1, 0) = f_2$, $g_3 = (1, 0, 0, 1)$. Alors $\{g_1, g_2, g_3\}$ est une famille génératrice de G et par le même genre de calcul que pour $\{f_1, f_2, f_3\}$ on montre facilement qu'elle est libre c'est donc une base de G . Donc $\dim G = 3$.

(c) Démontrer que la dimension de $F \cap G$ est 3 ou 2.

On a $F \cap G \subset F$ donc $\dim(F \cap G) \leq 3$.

Par formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Or $F + G \cap E$ donc $\dim(F + G) \leq \dim(E) \iff \dim(F + G) \leq 4$, donc on obtient :

$$4 \geq \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \iff 4 \geq 3 + 3 - \dim(F \cap G) \iff \dim(F \cap G) \geq 2.$$

Ainsi,

$$2 \leq \dim(F \cap G) \leq 3.$$

(d) Démontrer que $\dim(F \cap G) = 2$.

- Méthode 1 : On détermine $F \cap G$. Soit $u \in F \cap G$, de coordonnées $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} u \in F \cap G &\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \text{ (L1)} \\ x - y + z - t = 0 \text{ (L2)} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + 2z = 0 \text{ (L1 + L2)} \\ 2y + 2t = 0 \text{ (L1 - L2)} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \text{ (L1 + L2)} \\ y = -t \text{ (L1 - L2)} \end{cases} \\ &\iff u = \begin{pmatrix} -z \\ -t \\ z \\ t \end{pmatrix} \\ &\iff u = z \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_4} \end{aligned}$$

La famille $\{f_1, f_4\}$ est donc génératrice de $F \cap G$. De plus, les vecteurs ne sont pas colinéaires donc la famille est libre. C'est donc une base de $F \cap G$, donc

$$\dim(F \cap G) = 2.$$

- Méthode 2 : par l'absurde Si $\dim(F \cap G) = 3$ alors nécessairement $F = F \cap G = G$ car $F \cap G$ est un sev de F et de G qui sont de dimension 3. Or le vecteur $(1, 1, 1, 1) \in G$ mais $(1, 1, 1, 1) \notin F$. Donc $F \neq G$ il y a une contradiction. Ainsi $\dim F \cap G = 2$

(e) En déduire que $F + G = E$.

Par formule de Grassmann, on obtient :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3 + 3 - 2 = 4.$$

Ainsi, $F + G \in E$ et $\dim(F + G) = 4 = \dim(E)$ donc

$$F + G = E.$$

2. On note dans cette question :

$$H = \{(x, x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

(a) Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension.

Par définition $H = \text{Vect}((1, 1, 1, 1))$. Donc H est un sev de E . La famille $\{(1, 1, 1, 1)\}$ est une famille génératrice de H composée d'un seul vecteur non nul donc elle est libre. C'est donc une base de H . Ainsi $\dim H = 1$.

(b) Démontrer que H et F , défini dans la question précédente, sont supplémentaires dans E .

- $\dim H + \dim F = 1 + 3 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$
- $F \cap H = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$?

$$\begin{aligned} u \in F \cap H &\Leftrightarrow \begin{cases} u \in H \\ u \in F \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u = (x, x, x, x), x \in \mathbb{R} \\ x + x + x + x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Donc $F \cap H = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Donc F et H sont supplémentaires.

Exercice 2.

On dispose d'une pièce équilibrée qui est lancée indéfiniment.

On note X le numéro du lancer qui donne « pile » pour la première fois et Y le numéro du lancer qui donne « pile » pour la seconde fois.

- (a) Donner la loi de X .

Par définition :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$$

- (b) Donner l'espérance et la variance de X .

Et par le cours :

$$E(X) = 2 \text{ et } \text{Var}(X) = \frac{1/2}{1/4} = 2$$

- (c) On rappelle qu'en langage Python l'instruction `rd.random()` renvoie un nombre au hasard compris entre 0 et 1. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule une réalisation de la va X .

```

1 def VaX():
2     X=1
3     lancer=rd.random()
4     while lancer<1/2:
5         lancer=rd.random()
6         X=X+1
7     return X

```

- Déterminer $Y(\Omega)$

On a $Y(\Omega) =]2+\infty[$.

- Déterminer pour tout $k \in X(\Omega)$ et tout $n \in Y(\Omega)$, $P(X = k, Y = n)$

Si $k \geq n$, $P(X = k, Y = n) = 0$ car le premier pile ne peut pas arriver avant deuxième pile.

Si $k < n$, alors,

$$'X = k, Y = n' = 'F_1 F_2 \dots F_{k-1} P_k F_{k+1} \dots F_{n-1} F_n$$

Donc

$$P(X = k, Y = n) = P(F_1)P(F_2)\dots P(F_{k-1})P(P_k)P(F_{k+1})\dots P(F_{n-1})P(P_n)$$

Car les lancers sont indépendants. Et donc

$$P(X = k, Y = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4. A l'aide du système complet d'évènements $\{(X = k)_{k \in X(\Omega)}\}$ Montrer que

$$\forall n \in Y(\Omega), P(Y = n) = \frac{n-1}{2^n}$$

$\{(X = k)_{k \in X(\Omega)}\}$ est un système complet d'évènement. Par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k, Y = n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k, Y = n) \text{ car } P(X = k, Y = n) = 0 \text{ pour } k \geq n \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{n-1}{2^n} \end{aligned}$$

5. Calculer l'espérance de Y .

Y admet une espérance ssi $\sum_{n=2}^{+\infty} nP(Y = n)$ converge absolument ssi la série converge par positivité. Or

$$\sum_{n=2}^{+\infty} nP(Y = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée seconde, elle converge donc et

$$E(Y) = \frac{1}{4} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{4} \frac{2}{\frac{1}{8}} = 4$$

6. Compléter le programme suivant pour qu'il simule une réalisation de la variable Y .

1	X1=VaX()
2	X2=VaX()
3	Y=X1+X2

Exercice 3.

EML 2018 ECE On considère les applications

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - 2y + 3z, -x + 2y + 4z, x - 2y + 5z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x - z, 2x - 2z, -3x + 3z) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est une application linéaire et déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 f(\lambda u + \mu v) &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\
 &= (\lambda x + \mu x' - 2(\lambda y + \mu y') + 3(\lambda z + \mu z'), -(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') + 4(\lambda z + \mu z'), \\
 &\quad \lambda x + \mu x' - 2(\lambda y + \mu y') + 5(\lambda z + \mu z')) \\
 &= (\lambda(x - 2y + 3z) + \mu(x' - 2y' + 3z'), \lambda(-x + 2y + 4z) + \mu(-x' + 2y' + 4z'), \\
 &\quad \lambda(x - 2y + 5z) + \mu(x' - 2y' + 5z')) \\
 &= \lambda(x - 2y + 3z, -x + 2y + 4z, x - 2y + 5z) \\
 &\quad + \mu(x' - 2y' + 3z', -x' + 2y' + 4z', x' - 2y' + 5z') \\
 &= \lambda f(u) + \mu f(v)
 \end{aligned}$$

Déterminons maintenant $\ker f$. Soit $u = (x, y, z)$, alors

$$\begin{aligned}
 u = (x, y, z) \in \ker f &\Leftrightarrow f(x, y, z) = (0, 0, 0) \\
 &\Leftrightarrow (x - 2y + 3z, -x + 2y + 4z, x - 2y + 5z) = (0, 0, 0) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z &= 0 \\ -x + 2y + 4z &= 0 \\ x - 2y + 5z &= 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z &= 0 \\ 7z &= 0 \\ 2z &= 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow u = (2y, y, 0) = y(2, 1, 0)
 \end{aligned}$$

Ainsi $\ker f = \text{Vect}((2, 1, 0))$.

Il ne nous reste donc qu'à chercher $\text{Im}(f)$. On a vu précédemment que $\ker f = \text{Vect}((2, 1, 0))$. Ainsi $\dim \ker f = 1$. Et donc par le théorème du rang : $\dim \text{Im}(f) = 3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2$. De plus $f(1, 0, 0) = (1, -1, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (3, 4, 5)$. Donc $(1, -1, 1)$ et $(3, 4, 5)$ sont deux vecteurs de $\text{Im}(f)$ comme ils ne sont pas colinéaires ils forment une famille libre. Ainsi la famille $\{(1, -1, 1), (3, 4, 5)\}$ est une famille libre à 2 éléments dans $\text{Im}(f)$ de dimension 2. C'est donc une base de $\text{Im}(f)$. On a donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, -1, 1), (3, 4, 5))$.

2. Montrer que g est une application linéaire.

Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
 g(\lambda u + \mu v) &= g((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\
 &= (\lambda x + \mu x' - \lambda z + \mu z', 2(\lambda x + \mu x') - 2(\lambda z + \mu z'), -3(\lambda x + \mu x') + 3(\lambda z + \mu z')) \\
 &= (\lambda(x - z) + \mu(x' - z'), \lambda(2x - 2z) + \mu(2x' - 2z'), \lambda(-3x + 3z) + \mu(-3x' + 3z')) \\
 &= \lambda(x - z, 2x - 2z, -3x + 3z) + \mu(x' - z', 2x' - 2z', -3x' + 3z') \\
 &= \lambda g(u) + \mu g(v)
 \end{aligned}$$

Donc g est une application linéaire.

3. Déterminer le rang de g .

On sait que $\text{Im}(g) = \text{Vect}(g(1, 0, 0), g(0, 1, 0), g(0, 0, 1))$. Or

$$\begin{aligned}
 g(1, 0, 0) &= (1, 2, -3) \\
 g(0, 1, 0) &= (0, 0, 0) \\
 g(0, 0, 1) &= (-1, -2, 3)
 \end{aligned}$$

Or $(0, 0, 0) = 0(1, 2, -3)$ et $(-1, -2, 3) = -(1, 2, -3)$.
 Donc $\text{Im}(g) = \text{Vect}(1, 2, -3)$ et $\text{rg}(g) = \dim \text{Im}(g) = 1$.

4. En déduire la dimension du noyau de g .

Par le théorème du rang

$$\dim \ker(g) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Im}(g) = 3 - 1 = 2$$

5. Déterminer une base du noyau de g .

- Méthode 1 : On a déjà vu que $g(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ donc $(0, 1, 0) \in \ker g$.
 De plus on remarque que $g(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$, donc $(1, 0, 1) \in \ker g$. Ainsi $\{(0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ est une famille libre (car les vecteurs ne sont pas colinéaires) de $\ker g$ à deux éléments $= \dim \ker g$.
 C'est donc une base de $\ker g$ et donc $\ker g = \text{Vect}((0, 1, 0), (1, 0, 1))$.
- Méthode 2 : Calcul direct :

$$\begin{aligned} u = (x, y, z) \in \ker(g) &\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = z \\ &\Leftrightarrow u = (x, y, x) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \ker(g) = \{(x, y, x), x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$$

6. En déduire que $\ker(f) \oplus \ker(g) = \mathbb{R}^3$.

- Méthode 1 : On connaît une base de $\ker f$ et une base de $\ker g$, il suffit de regarder si en concaténant ces deux bases cela donne une base de $\mathbb{R}^3$. Regardons donc la famille $\mathcal{F} = \{(2, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. Montrons que cette famille est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned} \lambda_1(2, 1, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(1, 0, 1) &= (0, 0, 0) \Leftrightarrow (2\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi la famille $\mathcal{F}$ est libre. De plus elle contient 3 éléments $= \dim \mathbb{R}^3$ c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi $\ker f \oplus \ker g = \mathbb{R}^3$.

- Méthode 2 :
 — $\dim \ker(f) + \dim \ker(g) = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

— $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$?

$$\begin{aligned}
 u = (x, y, z) \in \ker(f) \cap \ker(g) &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -x + 2y + 4z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ 6x - 2y = 0 \\ x = z \end{cases} \\
 &\begin{cases} y = 2x \\ 9x = 0 \\ 2x = 0 \\ x = z \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x = y = z = 0
 \end{aligned}$$

Donc $\ker(f) \cap \ker(g) = \{0\}$

Donc $\ker(f) \oplus \ker(g) = \mathbb{R}^3$

7. Bonus : Déterminer le projecteur sur $\ker(f)$ parallèlement à $\ker(g)$.

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on cherche $u_f \in \ker f$ et $u_g \in \ker g$ tel que $u = u_f + u_g$. On a $\ker f = \text{Vect}(2, 1, 0)$ et $\ker g = \text{Vect}((0, 1, 0), (1, 0, 1))$.

On cherche $u_f = \lambda_1(2, 1, 0)$ et $u_g = \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(1, 0, 1)$. On cherche donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$(x, y, z) = (2\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3)$$

Ainsi

$$\begin{cases} x = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ y = \lambda_1 + \lambda_2 \\ z = \lambda_3 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \frac{x-z}{2} &= \lambda_1 \\ y - \frac{x-z}{2} &= \lambda_2 \\ z &= \lambda_3 \end{cases}$$

Soit $\lambda_1 = \frac{x-z}{2}$, $\lambda_2 = \frac{2y-x+z}{2}$ et $\lambda_3 = z$. Ainsi

$$u_f = \frac{x-z}{2}(2, 1, 0) \text{ et } u_g = \frac{2y-x+z}{2}(0, 1, 0) + z(1, 0, 1)$$

Alors on a bien $u_f \in \ker f$ et $u_g \in \ker g$. On vérifie juste que $u = u_f + u_g$. Ainsi on a :

$$p_{\ker f}(x, y, z) = \frac{x-z}{2}(2, 1, 0) = \left(x-z, \frac{x-z}{2}, 0\right)$$

Problème 1.

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. (a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, P_i l'événement : « Obtenir pile au i -ème lancer » et $F_i = \overline{P_i}$. On a alors

$$(X = 0) = P_1 \cap P_2$$

$$(X = 1) = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)$$

$$(X = 2) = (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4).$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$ -ème lancer et le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. On obtient donc

$$P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$P(X = 1) = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27},$$

$$P(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

- (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P[X = n] = (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}$.

— **Méthode 1 :**

Comme observé à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$ -ème lancer, le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. Formellement :

$$(X = n) = \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} \left(P_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} F_j \right) \right) \right] \cap P_{n+2}.$$

Par incompatibilité et par indépendance des lancers, il vient

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) \times \frac{2}{3} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{4}{3^{n+2}} \\ &= (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P[X = n] = (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}.$$

— **Méthode 2 :**

On raisonne en termes de dénombrement. L'évènement $X = n + 1$ correspond à obtenir dans un premier temps n faces et 1 pile, puis un pile. On a donc

$$\begin{aligned} P(X = n + 1) &= \underbrace{\binom{n+1}{1}}_{\text{Rang du premier pile}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{n \text{ faces en tout}} \times \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^2}_{2 \text{ piles en tout}} \\ &= (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}. \end{aligned}$$

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U .

U prend clairement des valeurs entières positives et, pour chaque entier n , il existe une suite de tirages amenant à n Face et 2 Pile suivi d'un tirage de la boule numérotée n . Autrement dit,

$$U(\Omega) = \mathbb{N}.$$

- (b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $(X = n)$, l'urne est composée de $(n + 1)$ boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à n donc

$$U_{(X=n)} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket).$$

- (c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$P[U = k] = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P[X = n] \quad \text{puis} \quad P[U = k] = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On commence par observer que $(U = k) \cap (X = n) = \emptyset$ si $n < k$ car on ne peut pas tirer une boule numérotée k dans une urne contenant des boules numérotées de 0 à n si $k > n$. Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $\{(X = n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(U = k \cap X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(U = k \cap X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P_{X=n}(U = k) P(X = n) \quad \text{par formule des probas composées} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n) \quad (\text{d'après 2.b}), \end{aligned}$$

ce qui établit la première égalité.

En injectant le résultat trouvé en **1.b**, il vient

$$\begin{aligned}
 P(U = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} \\
 &= 4 \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} \\
 &= 4 \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{j+k+2}} \text{ on pose } j = n - k \\
 &= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{3^j} \\
 &= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1 - 1/3} \\
 &= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

(d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} kP(U = k)$ converge absolument. Les valeurs prises par U étant positives, ceci équivaut à la convergence de la série. Or,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 0} kP(U = k) &= \sum_{k \geq 0} k \frac{2}{3^{k+1}} \\
 &= \sum_{k \geq 1} k \frac{2}{3^{k+1}} \\
 &= \frac{2}{9} \sum_{k \geq 1} k \frac{1}{3^{k-1}} \\
 &= \frac{2}{9} \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée de raison $1/3$. La série converge donc et alors

$$\begin{aligned}
 E(U) &= \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{1}{3^{k-1}} \\
 &= \frac{2}{9} \times \frac{1}{(1 - 1/3)^2} \\
 &= \frac{2}{9} \times \frac{9}{4} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E(U) = \frac{1}{2}.$$

Pour déterminer la variance, on commence par étudier l'espérance de $U(U - 1)$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k \geq 0} k(k-1)P(U = k) &= \sum_{k \geq 2} k(k-1) \frac{2}{3^{k+1}} \\ &= \frac{2}{27} \sum_{k \geq 2} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}.\end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois de raison $1/3$, il s'agit donc d'une série convergente, et plus précisément absolument convergente puisque ses termes sont positifs. Il suit donc du théorème de transfert que $U(U - 1)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}E(U(U - 1)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)PU = k \\ &= \frac{2}{27} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\ &= \frac{2}{27} \times \frac{2}{(1 - 1/3)^3} \\ &= \frac{2}{27} \times \frac{2 \times 27}{8} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Mais alors $U^2 = U^2 - U + U = U(U - 1) + U$ admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance et

$$E(U^2) = E(U(U - 1)) + E(U) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens que :

$$\text{Var}(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

3. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V .

V prend clairement des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un tirage amenant à n Face et deux Pile suivi d'un tirage de la boule 0, auquel cas ($V = n$) est réalisé. Ainsi,

$$V(\Omega) = \mathbb{N}.$$

- (b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $V_{(X=n)}$ prend ses valeurs entre 0 et n et, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned}P_{(X=n)}(V = k) &= P_{(X=n)}(X - U = k) \\ &= P_{(X=n)}(U = n - k) \\ &= \frac{1}{n + 1}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$V_{(X=n)} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket).$$

(c) En déduire la loi de V .

En reprenant les calculs effectués en **2.b**, on observe que la loi de V est la même que celle de U . Autrement dit,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(V = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

Soient $k, l \in \mathbb{N}$. On a

$$(U = k, V = l) = (U = k, X - U = l) = (U = k, X = k + l).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(U = k, V = l) &= P(U = k, X = k + l) \\ &= P_{(X=k+l)}(U = k) \times P(X = k + l) \\ &= \frac{1}{k + l + 1} \times (k + l + 1) \frac{4}{3^{k+l+2}} \\ &= \frac{4}{3^{k+l+2}} \\ &= \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{l+1}} \\ &= P(U = k)P(V = l). \end{aligned}$$

Ainsi, U et V sont indépendantes.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0; 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

5. Simulation informatique

(a) Écrire une fonction Python `simule_X` qui simule la variable aléatoire X .

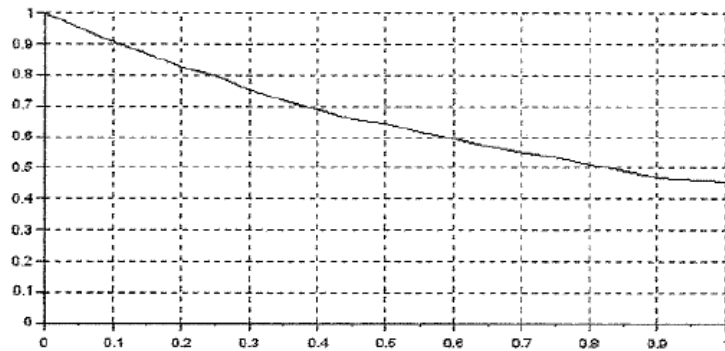
```
1                                     def simule_X():
2         Pile1=rd.geometric(2/3)
3         Pile2=rd.geometric(2/3)
4         X=Pile1+Pile2-2
5         return X
```

- (b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0; 1[$, simule la variable aléatoire Y . Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
1 def mystere(p):
2     r = 0
3     N = 10**4
4     for k in range(1,N+1):
5         x = simule_X()
6         y = simule_Y(p)
7         if x <= y :
8             r = r + 1/N
9     return r
```

La fonction proposée dans l'énoncé calcule la fréquence, sur 10 000 simulations, des victoires de A . C'est donc une approximation de l'espérance de victoire de A .

- (c) On trace, en fonction de p , une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

On observe que pour $p \approx 0,8$, on obtient une fréquence de victoires de A approximativement égale à 50%. Ainsi : Le jeu est équilibré pour $p \approx 0,8$.