

Devoir surveillé 6 du 29/04/2026 Sujet 2
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte ... pages

Exercice 1.

Dans cet exercice, on note $E = \mathbb{R}^4$.

1. On note :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y + z + t = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - y + z - t = 0\}$$

(a) Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

$$\begin{aligned} u = (x, y, z, t) \in F &\Leftrightarrow x + y + z + t = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -y - z - t \\ &\Leftrightarrow u = (-y - z - t, y, z, t) \end{aligned}$$

Donc $F = \{(-y - z - t, y, z, t) \mid y, z, t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$.
Donc F est un sev de E .

$$\begin{aligned} u = (x, y, z, t) \in G &\Leftrightarrow x - y + z - t = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y - z + t \\ &\Leftrightarrow u = (y - z + t, y, z, t) \end{aligned}$$

Donc $G = \{(y - z + t, y, z, t) \mid y, z, t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$. Donc G est un sev de E .

(b) Donner les dimensions de F et de G .

Posons $f_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $f_2 = (-1, 0, 1, 0)$ et $f_3 = (-1, 0, 0, 1)$. Alors la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est génératrice de F . Montrons qu'elle est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_E$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0_E \iff \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La famille est donc libre c'est donc une base de F . Donc $\dim F = 3$

De même posons $g_1 = (1, 1, 0, 0)$, $g_2 = (-1, 0, 1, 0)$, $g_3 = (1, 0, 0, 1)$. Alors $\{g_1, g_2, g_3\}$ est une famille génératrice de G et par le même genre de calcul que pour $\{f_1, f_2, f_3\}$ on montre facilement qu'elle est libre c'est donc une base de G . Donc $\dim G = 3$.

(c) Démontrer que la dimension de $F \cap G$ est 3 ou 2.

On a $F \cap G \subset F$ donc $\dim(F \cap G) \leq 3$.

Par formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Or $F + G \subset E$ donc $\dim(F + G) \leq \dim(E) \iff \dim(F + G) \leq 4$, donc on obtient :

$$4 \geq \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \iff 4 \geq 3 + 3 - \dim(F \cap G) \iff \dim(F \cap G) \geq 2.$$

Ainsi,

$$2 \leq \dim(F \cap G) \leq 3.$$

(d) Démontrer que $\dim(F \cap G) = 2$.

- Méthode 1 : On détermine $F \cap G$. Soit $u \in F \cap G$, de coordonnées $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} u \in F \cap G &\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 & (L1) \\ x - y + z - t = 0 & (L2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + 2z = 0 & (L1 + L2) \\ 2y + 2t = 0 & (L1 - L2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z & (L1 + L2) \\ y = -t & (L1 - L2) \end{cases} \\ &\iff u = \begin{pmatrix} -z \\ -t \\ z \\ t \end{pmatrix} \\ &\iff u = z \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_4} \end{aligned}$$

La famille $\{f_1, f_4\}$ est donc génératrice de $F \cap G$. De plus, les vecteurs ne sont pas colinéaires donc la famille est libre. C'est donc une base de $F \cap G$, donc

$$\dim(F \cap G) = 2.$$

- Méthode 2 : par l'absurde Si $\dim(F \cap G) = 3$ alors nécessairement $F = F \cap G = G$ car $F \cap G$ est un sev de F et de G qui sont de dimension 3. Or le vecteur $(1, 1, 1, 1) \in G$ mais $(1, 1, 1, 1) \notin F$. Donc $F \neq G$ il y a une contradiction. Ainsi $\dim F \cap G = 2$

(e) En déduire que $F + G = E$.

Par formule de Grassmann, on obtient :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3 + 3 - 2 = 4.$$

Ainsi, $F + G \in E$ et $\dim(F + G) = 4 = \dim(E)$ donc

$$F + G = E.$$

2. On note dans cette question :

$$H = \{(x, x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

(a) Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension.

Par définition $H = \text{Vect}((1, 1, 1, 1))$. Donc H est un sev de E . La famille $\{(1, 1, 1, 1)\}$ est une famille génératrice de H composée d'un seul vecteur non nul donc elle est libre. C'est donc une base de H . Ainsi $\dim H = 1$.

(b) Démontrer que H et F , défini dans la question précédente, sont supplémentaires dans E .

- $\dim H + \dim F = 1 + 3 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$

- $F \cap H = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$?

$$\begin{aligned} u \in F \cap H &\Leftrightarrow \begin{cases} u \in H \\ u \in F \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u = (x, x, x, x), \quad x \in \mathbb{R} \\ x + x + x + x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Donc $F \cap H = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Donc F et H sont supplémentaires.

Exercice 2.

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans cette question, on suppose que $n = 1$, reconnaître la loi de Y .

Si $n = 1$ cela veut dire que l'on ne tire qu'une boule dans l'urne V . Ainsi $Y = 0$ ou $Y = 1$. Y suit une loi de Bernoulli avec $p(Y = 1) = p$ la proportion de boules blanches. Donc $Y \hookrightarrow \text{Bernoulli}(p)$.

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

$X \hookrightarrow \text{Unif}([1; n])$. Donc

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } \text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

3. Soit k un élément de $[1, n]$. Reconnaître la loi de Y conditionnellement à l'événement $(X = k)$ (justifier).

Si $X = k$ alors on tire k boules dans l'urne V avec remise les tirages sont donc indépendants et la proportion de boules blanches ne change pas, cela reste p . On fait donc la somme de k expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre p . On a donc, sous la condition $X = k$

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k, p)$$

En déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$.

Ainsi si $k < i$ on ne peut pas tirer plus de boules que l'on ne tire de boules tout court. Ainsi $P_{(X=k)}(Y = i) = 0$ si $i > k$.

Si $i \leq k$: alors comme $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k, p)$, on a $P_{(X=k)}(Y = i) = \binom{k}{i} p^i q^{k-i}$

4. On rappelle les commandes Python suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

`rd.randint(a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b - 1]$

`rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p

Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y .

```

1 n=input ('entrez la valeur de n:')
2 p=input ('entrez la valeur de p:')
3 X=rd.randint(1,k+1)
4 Y=rd.binomial(X,p)

```

5. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\llbracket 0, n \rrbracket$, puis montrer que :

$$P(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}.$$

Les boules de l'urne U étant numérotées de 1 à n on fait au maximum n tirage dans l'urne V . Ainsi on peut avoir obtenu entre 0 et n boules blanches.

De plus $\{X = k\}_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements. Donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^n P(X = k \cap Y = 0) \\
 &= \sum_{k=1}^n P(X = k) P_{X=k}(Y = 0) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \binom{k}{0} p^0 q^{k-0} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k \\
 &= \frac{1}{n} q \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (\text{somme géométrique}) \\
 &= \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}
 \end{aligned}$$

- (b) Écrire, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

De même qu'à la question précédente, par la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
 P(Y = i) &= \sum_{k=1}^n P(X = k) P_{X=k}(Y = i) \\
 &= \sum_{k=1}^{i-1} P(X = k) P_{X=k}(Y = i) + \sum_{k=i}^n P(X = k) P_{X=k}(Y = i) \\
 &= \sum_{k=i}^n P(X = k) P_{X=k}(Y = i) \text{ puisque } P_{X=k}(Y = i) = 0 \text{ si } k < i \\
 &= \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i}
 \end{aligned}$$

6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}.$$

Soient i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Alors, d'une part :

$$\begin{aligned} i \binom{k}{i} &= i \frac{k!}{i!(k-i)!} \\ &= \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} \end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} k \binom{k-1}{i-1} &= k \frac{(k-1)!}{(i-1)!(k-1-(i-1))!} \\ &= \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} \end{aligned}$$

On a donc bien : $i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$

(b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right).$$

Par définition de l'espérance on a :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=0}^n iP(Y=i) \\ &= \sum_{i=1}^n iP(Y=i) \quad \text{si } i=0, \quad iP(Y=i)=0 \\ &= \sum_{i=1}^n i \sum_{k=i}^n \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n i \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \quad \text{par la question précédente} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \quad \text{en échangeant les deux sommes} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \quad \text{cqfd} \end{aligned}$$

(c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)}{2}p$.

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^{j+1} q^{k-j-1} \quad \text{par changement d'indice } j = i - 1 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kp \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^j q^{k-1-j} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kp(p+q)^{k-1} \quad \text{Formule du binôme de Newton} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kp \\
&= \frac{p}{n} \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n+1}{2} p.
\end{aligned}$$

Exercice 3.

Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k -ième tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5, 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

Chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, la variable X_k suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Et donc : $E(X_k) = \frac{n+1}{2}$.

2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.

Si la première boule tirée est la boule numéro n , on a $T_n = 1$.

Comme $S_n = \sum_{i=1}^n \underbrace{X_i}_{\geq 1} \geq n$, la variable T_n ne peut pas prendre de valeur strictement

supérieure à n .

Enfin, toute valeur intermédiaire est possible : si $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, alors la suite de tirages

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{(k-1) \text{ premiers tirages}}, \overbrace{(n-k+1)}^{k\text{-ième tirage}} \quad (\text{par exemple})$$

donne $T_n = k$ (puisque $S_{k-1} = k-1 < n$ et $S_k = n$).

(b) Calculer $P(T_n = 1)$.

La seule possibilité pour avoir $S_1 \geq n$ est de tirer la boule numéro n au premier tirage (et on aura alors en fait $S_1 = n$) :

$$(T_n = 1) = (X_1 = n).$$

Puisque X_1 suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P(T_n = 1) = \frac{1}{n}.$$

(c) Montrer que :

$$P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

L'événement $(T_n = n)$ est égal à :

$$\begin{aligned} (S_{n-1} \leq n-1) \cap (S_n \geq n) &= \underbrace{\left(\underbrace{\overbrace{X_1}^{\geq 1}} + \cdots + \underbrace{\overbrace{X_{n-1}}^{\geq 1}} \right)}_{\text{donc égalité partout} \leq n-1} \cap (S_n \geq n) \\ &= (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 1) \cap (S_n \geq n) \\ &= (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_1 + \cdots + X_n \geq n) \\ &= (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 1) \cap \underbrace{(X_n \geq 1)}_{\text{toujours vrai}} \\ &= (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = 1) \end{aligned}$$

Par indépendance de $X_1, \dots, X_{n-1}$ (les tirages sont avec remise) :

$$P(T_n = n) = \frac{1}{n} \times \cdots \times \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2 .

D'après la question 2 :

$$T_2(\Omega) = \{1, 2\} \quad ; \quad P(T_2 = 1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(T_2 = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{1}{2}.$$

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3 . Vérifier que $E(T_3) = \frac{16}{9}$.

D'après la question 2 :

$$T_3(\Omega) = \{1, 2, 3\} \quad ; \quad P(T_3 = 1) = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{1}{9}.$$

Et par conséquent :

$$P(T_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Calculons l'espérance de T_3 :

$$E(T_3) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{9}.$$

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Comme déjà précisé en partie A pour S_n et S_{n-1} , la variable S_k vaut au minimum k et ceci se produit lorsque les k premiers tirages ont donné la boule numéro 1.

Elle vaut au maximum $n \times k$, situation qui se produit lorsque l'on tire k fois la boule numéro n .

Ceci prouve l'inclusion :

$$S_k(\Omega) \subset \llbracket k, nk \rrbracket.$$

On peut supposer que le correcteur se contentera de cette réponse, l'égalité étant un peu difficile à prouver. On peut par exemple procéder par récurrence sur $k \geq 1$ pour prouver l'inclusion réciproque : $\forall k \geq 1, \llbracket k, nk \rrbracket \subset S_k(\Omega)$.

— Initialisation : Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si le premier tirage donne la boule numéro i , alors $S_1 = X_1 = i$; donc : $\llbracket 1, n \rrbracket \subset S_1(\Omega)$.

— Hérédité : Supposons pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$ fixé que $\llbracket k, nk \rrbracket \subset S_k(\Omega)$ et prouvons que $\llbracket k+1, n(k+1) \rrbracket \subset S_{k+1}(\Omega)$. Soit $i \in \llbracket k+1, n(k+1) \rrbracket$:

— Si $i \leq kn$, alors $i-1 \in \llbracket k, nk \rrbracket$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une suite de k tirages $x_1, \dots, x_k$ telle que $S_k = x_1 + \dots + x_k = i-1$.

La suite de $(k+1)$ tirages $x_1, \dots, x_k, 1$ donne $S_{k+1} = i$.

— Si $i \geq kn+1$, alors, par hypothèse de récurrence, il existe une suite de k tirages $x_1, \dots, x_k$ telle que $S_k = x_1 + \dots + x_k = kn$.

La suite de $(k+1)$ tirages $x_1, \dots, x_k, i-kn$ (on a bien $1 \leq i-kn \leq n$ car $kn+1 \leq i \leq kn+n$) donne $S_{k+1} = x_1 + \dots + x_k + i-kn = nk + i - kn = i$.

6. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

- (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1} .

On a immédiatement :

$$S_{k+1} = X_1 + \dots + X_k + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}.$$

- (b) En utilisation un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k , démontrer alors que :

$$\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$

Soit $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{(S_k = j)\}_{j \in \llbracket k, nk \rrbracket}$ donne :

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{nk} P((S_{k+1} = i) \cap (S_k = j)) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} P((S_k + X_{k+1} = i) \cap (S_k = j)) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} P((X_{k+1} = i - j) \cap (S_k = j)) \end{aligned}$$

L'événement $(X_{k+1} = i - j)$ étant impossible si $i - j \notin \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut ne conserver dans cette somme que les termes tels que $1 \leq i - j \leq n$, c'est-à-dire (la deuxième des inégalités précédentes étant réalisée car $i \leq n$) tels que $j \leq i-1$, les autres termes étant nuls. Puisque $i-1 \leq nk$ (car $i \leq n$ et $k \geq 1$), on a :

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} P((X_{k+1} = i - j) \cap (S_k = j))$$

Enfin, les variables $X_1, \dots, X_k, X_{k+1}$ étant indépendantes, le lemme des colations donne l'indépendance des deux variables $S_k = X_1 + \dots + X_k$ et X_{k+1} .
D'où avec la question 1. (X_{k+1} suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$) :

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \underbrace{P(X_{k+1} = i - j) \times P(S_k = j)}_{=\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j)$$

7. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.

La formule du triangle de Pascal s'écrit, pour $k, j \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq j - 1$:

$$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}.$$

- (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k + 1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \mathbb{N}^*$ supérieur ou égal à $k + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{k-1}{k-1} \\ &= \sum_{j=k+1}^{i-1} \left(\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} \right) + 1 \\ &= \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j}{k} - \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j-1}{k} + 1 \\ &= \sum_{j=k+1}^{i-1} \binom{j}{k} - \sum_{l=k}^{i-2} \binom{l}{k} + 1 \\ &= \binom{i-1}{k} - \binom{k}{k} + 1 \text{ par sommes télescopiques} \\ &= \binom{i-1}{k} - 1 + 1 \\ &= \binom{i-1}{k} \end{aligned}$$

- (c) Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\ll \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \gg.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

— Initialisation : $\mathcal{H}_1$ s'écrit

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(S_1 = i) = \frac{1}{n} \underbrace{\binom{i-1}{0}}_{=1} = \frac{1}{n}.$$

Comme $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ d'après la question 1., ceci est vrai.

- Hérité : Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie pour un entier $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ fixé.
 Soit $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$. D'après 6.(b) et par hypothèse de récurrence :

$$P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k} \binom{j-1}{k-1} = \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1}$$

Et donc, d'après la question 7.(b) :

$$P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{k} = \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{(k+1)-1}.$$

On a ainsi prouvé $\mathcal{H}_{k+1}$.

8. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.

L'événement $(T_n > k)$ signifie que la somme des numéros des boules obtenues est pour la première fois supérieure ou égale à n lors du tirage numéro ℓ avec $\ell > k$, autrement dit que lors du tirage numéro k , la somme des numéros des boules obtenues est *strictement* inférieure (négation de « supérieure ou égale ») à n , c'est-à-dire $(S_k < n) = (S_k \leq n-1)$:

$$(T_n > k) = (S_k \leq n-1).$$

- (b) En déduire que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$.

En écrivant, avec une union d'événements incompatibles :

$$(T_n > k) = (S_k \leq n-1) = \bigcup_{i=1}^{n-1} (S_k = i)$$

on obtient, avec 7.(c) puis 7.(b) :

$$P(T_n > k) = \sum_{i=1}^{n-1} P(S_k = i) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}.$$

9. Démontrer que $E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$, puis que $E(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

La variable aléatoire T_n ($T_n(\Omega) \in \llbracket 1, n \rrbracket$) étant finie, elle admet en effet une espérance et :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^n k P(T_n = k).$$

En écrivant, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \sum_{k=1}^n k (P(T_n > k-1) - P(T_n > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n k P(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^n k P(T_n > k) \\ &= \sum_{k=1}^n (k-1 + \textcolor{red}{1}) P(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^n k P(T_n > k) \\ &= \sum_{k=1}^n \underbrace{(k-1)}_{\substack{=0 \\ \text{pour } k=1}} P(T_n > k-1) + \sum_{k=1}^n \textcolor{red}{P(T_n > k-1)} - \sum_{k=1}^n k P(T_n > k) \\ &= \sum_{k=2}^n (k-1) P(T_n > k-1) + \sum_{k=1}^n P(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^n k P(T_n > k) \end{aligned}$$

Avec le changement d'indice $\ell = k - 1$ dans les deux premières sommes :

$$E(T_n) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell P(T_n > \ell) + \sum_{\ell=0}^{n-1} P(T_n > \ell) - \sum_{k=1}^n k P(T_n > k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} P(T_n > \ell).$$

Avec la question 8.(b), on a donc :

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \times 1^{(n-1)-k}}_{\text{par la formule du binôme de Newton}} = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^{n-1}$$

10. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$.

On va déterminer la limite de $E(T_n)$ en écrivant l'expression trouvée ci-dessus sous « forme exponentielle » :

$$E(T_n) = \exp\left((n-1) \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)\right)$$

Avec l'équivalent classique $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ lorsque u est une suite qui converge vers 0 (ici $u_n = 1/n \rightarrow 0$) :

$$(n-1) \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n-1) \times \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n) = \exp(1) = e.$$

Exercice 4.

On note tB la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On vérifie les conditions successives :

- L'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
- Il est non vide car la matrice nulle appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: ${}^t0 = 0 = -0$.
- Pour tout $(A, B) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} {}^t(\lambda A + \mu B) &= \lambda {}^tA + \mu {}^tB \quad \text{par linéarité de la transposition} \\ &= -\lambda A - \mu B \quad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont dans } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ &= -(\lambda A + \mu B) \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\lambda A + \mu B$ appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Conclusion : L'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f , qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = ({}^tA) M + M A$$

2. (a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned}
 {}^t f(M) &= {}^t [({}^t A) M + M A] \\
 &= {}^t M {}^t ({}^t A) + {}^t A {}^t M \quad \text{car } {}^t(AB) = {}^t B {}^t A \text{ pour tout } (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \\
 &= {}^t M A + {}^t A {}^t M \quad \text{car } {}^t({}^t A) = A \\
 &= -MA - {}^t AM \quad \text{car } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\
 &= -[MA + {}^t AM] \\
 &= -f(M)
 \end{aligned}$$

Ce qui montre que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

- (b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Montrons que f est linéaire. Soient $(M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ quelconques. On a :

$$\begin{aligned}
 f(\lambda M + \mu N) &= {}^t A(\lambda M + \mu N) + (\lambda M + \mu N)A \\
 &= (\lambda {}^t AM + \mu {}^t AN) + (\lambda MA + \mu NA) \\
 &= \lambda ({}^t AM + MA) + \mu ({}^t AN + NA) \\
 &= \lambda f(M) + \mu f(N)
 \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est linéaire. De plus, on a vu à la question précédente que $f(M)$ appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ quel que soit M dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Par conséquent, f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &\iff {}^t M = -M \\
 &\iff \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} a = 0 \\ e = 0 \\ i = 0 \\ d = -b \\ g = -c \\ h = -f \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \{bJ + cK + fL, (b, c, f) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= Vect(J, K, L)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la famille (J, K, L) est génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha J + \beta K + \gamma L = 0 &\iff \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la famille (J, K, L) est libre. On en déduit, avec le résultat de la question précédente, que c'est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Et comme elle est constituée de 3 éléments, on a $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = 3$.

4. (a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

On calcule :

$$\begin{aligned}
f(J) &= {}^tAJ + JA \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ce qui donne : $f(J) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, soit $f(J) = -J - L$.

De même :

$$\begin{aligned}
f(K) &= {}^tAK + KA \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ce qui donne : $f(K) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

Et enfin

$$\begin{aligned} f(L) &= {}^tAL + LA \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui donne : $f(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -L$.

- (b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.

On détermine l'image de f :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(J), f(K), f(L)) \quad \text{car } (J, K, L) \text{ est une base de } \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \\ &= \text{Vect}(-J - L, 0, -L) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \text{Vect}(-J - L, -L) \\ &= \text{Vect}(J + L, L) \quad (\text{on change les vecteurs en leurs opposés}) \\ &= \text{Vect}(J, L) \quad (\text{on soustrait le deuxième au premier}) \end{aligned}$$

Or, la famille (J, L) est libre (puisque (J, K, L) l'est).

Par conséquent, (J, L) est une base de $\text{Im}(f)$, et elle est constituée d'éléments de $\mathcal{B}$.

- (c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.

D'après la question précédente, $\dim(\text{Im}(f)) = 2$. Donc, par le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(f)) &= \dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(f)) \\ &= 3 - 2 \end{aligned}$$

soit $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

Or, $f(K) = 0$ (cf question 4.(a)), donc K appartient à $\text{Ker}(f)$. Ainsi, la famille (K) est une famille libre (elle est constituée d'un seul vecteur non nul) constituée d'éléments de $\text{Ker}(f)$, et de cardinal $\dim(\text{Ker}(f))$.

Conclusion : la famille (K) est une base de $\text{Ker}(f)$.