
Devoir surveillé 6 du 29/04/2026 Sujet 1
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 3 pages

Le sujet est à rendre avec la copie

Exercice 1.

Dans cet exercice, on note $E = \mathbb{R}^4$.

1. On note :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y + z + t = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - y + z - t = 0\}$$

- (a) Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (b) Donner les dimensions de F et de G .
- (c) Démontrer que la dimension de $F \cap G$ est 3 ou 2.
- (d) Démontrer que $\dim(F \cap G) = 2$.
- (e) En déduire que $F + G = E$.

2. On note dans cette question :

$$H = \{(x, x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

- (a) Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension.
- (b) Démontrer que H et F , défini dans la question précédente, sont supplémentaires dans E .

Exercice 2.

On dispose d'une pièce équilibrée qui est lancée indéfiniment.

On note X le numéro du lancer qui donne « pile » pour la première fois et Y le numéro du lancer qui donne « pile » pour la seconde fois.

- 1. (a) Donner la loi de X .
- (b) Donner l'espérance et la variance de X .
- (c) On rappelle qu'en langage Python l'instruction `rd.random()` renvoie un nombre au hasard compris entre 0 et 1. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule une réalisation de la va X .

```
1 def VaX():  
2     X=....  
3     lancer=rd.random()  
4     while .....:  
5         lancer=rd.random()  
6         X=....  
7     return X
```

- 2. Déterminer $Y(\Omega)$
- 3. Déterminer pour tout $k \in X(\Omega)$ et tout $n \in Y(\Omega)$, $P(X = k, Y = n)$
- 4. A l'aide du système complet d'évènements $\{(X = k)_{k \in X(\Omega)}\}$ Montrer que

$$\forall n \in Y(\Omega), P(Y = n) = \frac{n-1}{2^n}$$

- 5. Calculer l'espérance de Y .

6. Compléter le programme suivant pour qu'il simule une réalisation de la variable Y .

```

1  X1=VaX()
2  X2=VaX()
3  Y=.....

```

Exercice 3.

On considère les applications

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x - 2y + 3z, -x + 2y + 4z, x - 2y + 5z)$$

et

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x - z, 2x - 2z, -3x + 3z)$$

1. Montrer que f est une application linéaire et déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.
2. Montrer que g est une application linéaire.
3. Déterminer le rang de g .
4. En déduire la dimension du noyau de g .
5. Déterminer une base du noyau de g .
6. En déduire que $\ker(f) \oplus \ker(g) = \mathbb{R}^3$.
7. Bonus : Déterminer le projecteur sur $\ker(f)$ parallèlement à $\ker(g)$.

Problème 1.

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. (a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.
 (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P[X = n] = (n + 1) \frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U .
 (b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.
 (c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$P[U = k] = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P[X = n] \quad \text{puis} \quad P[U = k] = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

- (d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
3. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V .
 (b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.
 (c) En déduire la loi de V .
4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0; 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

5. Simulation informatique

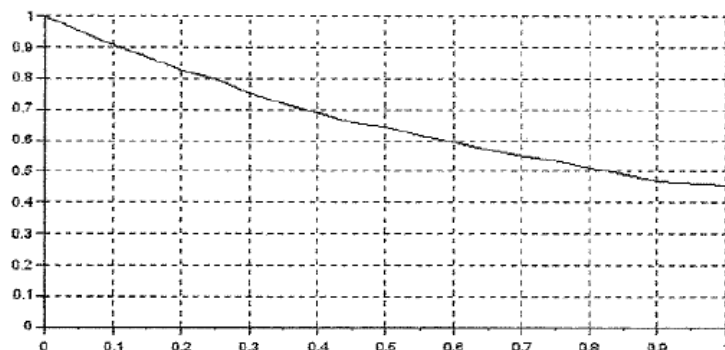
- (a) Écrire une fonction Python `simule_X` qui simule la variable aléatoire X .
- (b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0; 1[$, simule la variable aléatoire Y . Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```

1 def mystere(p):
2     r = 0
3     N = 10**4
4     for k in range(1,N+1):
5         x = simule_X()
6         y = simule_Y(p)
7         if x <= y :
8             r = r + 1/N
9     return r

```

- (c) On trace, en fonction de p , une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

Devoir surveillé 6 du 29/04/2026 Sujet 2
Durée 4h - Calculatrice interdite - L'énoncé comporte 4 pages

Exercice 1.

Dans cet exercice, on note $E = \mathbb{R}^4$.

1. On note :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y + z + t = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - y + z - t = 0\}$$

- (a) Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (b) Donner les dimensions de F et de G .
- (c) Démontrer que la dimension de $F \cap G$ est 3 ou 2.
- (d) Démontrer que $\dim(F \cap G) = 2$.
- (e) En déduire que $F + G = E$.

2. On note dans cette question :

$$H = \{(x, x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

- (a) Démontrer que H est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension.
- (b) Démontrer que H et F , défini dans la question précédente, sont supplémentaires dans E .

Exercice 2.

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. **Dans cette question**, on suppose que $n = 1$, reconnaître la loi de Y .

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. Soit k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Reconnaître la loi de Y conditionnellement à l'événement $(X = k)$ (**justifier**).
En déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$.

4. On rappelle les commandes Python suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

`rd.randint(a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b - 1 \rrbracket$

`rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p

Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y .

```
1 n=input ('entrez la valeur de n:')
2 p=input ('entrez la valeur de p:')
3 X=.....
4 Y=.....
```

5. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\llbracket 0, n \rrbracket$, puis montrer que :

$$P(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}.$$

- (b) Écrire, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}.$$

- (b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right).$$

- (c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)}{2}p$.

Exercice 3.

Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k -ième tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5, 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
- (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
(b) Calculer $P(T_n = 1)$.
(c) Montrer que :

$$P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

- Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2 .
- Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3 . Vérifier que $E(T_3) = \frac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
 - (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1} .
 - (b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k , démontrer alors que :

$$\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$

7. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
- (b) En déduire, à l'aide d'une récurrence sur i , que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

- (c) Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\ll \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \gg.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

8. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.
- (b) En déduire que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$.
9. Démontrer que $E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$, puis que $E(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
10. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$.

Exercice 4.

On note tB la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f , qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

2. (a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
- (b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
 - (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

- (b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
- 4. (a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
- (b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
- (c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis en donner une base.