
TD 3 - Fonctions usuelles

Notation :

La fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière d'un nombre réel, c'est-à-dire l'entier le plus proche par valeur inférieure.

Exercice 1.

Déterminer les ensembles de définition, de continuité, de dérivabilité et la dérivée éventuelle de f dans les cas suivants :

- | | | |
|---------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$ | 6. $f(x) = (x^2 + x - 1)e^x$ | 11. $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 3)$ |
| 2. $f(x) = \sqrt{x - 3}$ | 7. $f(x) = xe^{x^2 + x}$ | 12. $f(x) = \ln(\cos x)$ |
| 3. $f(x) = \sin^4(x)$ | 8. $f(x) = (x^2 - x + 1)^4$ | 13. $f(x) = \ln \sin x $ |
| 4. $f(x) = \cos(2x^2 - x)$ | 9. $f(x) = e^x \sin x$ | 14. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1 - x}}$ |
| 5. $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - x - 2}$ | 10. $f(x) = \tan^2 x$ | |

Exercice 2.

Étudier le sens de variation de f dans chacun des cas suivants.

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $f(x) = 1 + 3x - x^3$ | 4. $f(x) = x\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$ | 7. $f(x) = x^2 - 3 + 3e^{-\frac{1}{3}x}$ |
| 2. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2x}$ | 5. $f(x) = x \cos x - \sin x$
sur $[0, \pi]$ | 8. $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$ |
| 3. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3x + 3}$ | 6. $f(x) = \frac{x^2}{2}(\ln(x) - \frac{3}{2})$ | 9. $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$ |

Exercice 3.

Résoudre l'équation $|2x^2 + x - 1| = |2x - 3|$.

Exercice 4.

Démontrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Exercice 5.

Étudier la fonction $f : x \rightarrow |x|^{1/x}$.

Indication : On utilisera l'écriture : $a^b = e^{b \ln(a)}$.

Exercice 6.

Résoudre les inéquations

1. $\ln |2x + 1| + \ln |x + 3| < \ln 3$
2. $\ln |x - 1| - 2 \ln |x| + \ln |x + 1| < 1$

Exercice 7.

On pose $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Étudier le signe de $x \cos x - \sin x$ sur $[0, \pi]$.
2. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
3. (a) Démontrer que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad 0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$$

- (b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4. Tracer la courbe représentative de f .

Exercice 8.

On pose

$$f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
2. Montrer que f est impaire.
3. Étudier les variations de f .

Exercice 9.

1. (a) Déterminer tous les réels x tels que $\sin(x) = \frac{1}{2}$
 (b) Même question avec $\tan(x) = -1$
2. Déterminer tous les réels x tels que $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 10.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Donner une relation simple entre $\cos(2\theta)$ et $\cos(\theta)$.
2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
3. Vérifier que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

Exercice 11.

A l'aide d'un changement de variable, résoudre l'équation $e^2x + 4e^x + 1 - 6e^{-x} = 0$ d'inconnue le réel x .

Exercice 12.

Résoudre les équation ou inéquations suivantes d'inconnue le réel x :

1. $|2x - 1| = 1$
2. $|1 - 3x| \leq 2$
3. $|4x - 3| > 2$

Exercice 13.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{e^x}$ et E l'ensemble des fonctions définies sur $]1, +\infty[$ vérifiant : $\forall x > 1, f(x) = f(x^2)$.

1. Prouver que E n'est pas vide.
2. Soit f une fonction définie sur $]1, +\infty[$. Montrer que $f \in E \Leftrightarrow f \circ h$ est $\ln(2)$ -périodique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14.

Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

- Déterminer l'ensemble D_φ de définition de φ .
- Déterminer les limites de φ en -1 et 1 . Interprétation graphique ?
- (a) Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$
 (b) Réécrire judicieusement φ pour en déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -1$
- On introduit sur $] -1, 1[$, la fonction h définie par $h(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)$.
 (a) Montrer que pour tout $x \in D_\varphi$, $\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)(\ln(1-x))^2}$
 (b) Calculer h' sur $] -1, 1[$.
 (c) Résoudre sur $] -1, 1[$ l'inéquation $\ln(1-x) < \ln(1+x)$. En déduire le signe de h' .
 (d) Dresser le tableau de variation de h . En déduire le signe de h .
 (e) Déterminer la limite de h à gauche de 1 , en posant $X = 1-x$.
 (f) Donner le tableau de variations de φ .
- Dessiner l'allure de φ
- Résoudre sur D_φ l'équation $\varphi(x) = -2$.

Exercice 15. Fonction partie entière

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier n vérifiant $n \leq x < n+1$, n est appelé *partie entière de x* que l'on note en général $\lfloor x \rfloor$.

Partie A : Généralités

- Résoudre l'équation d'inconnue $x : \lfloor x \rfloor = k$, où $k \in \mathbb{Z}$
- Prouver que la fonction partie entière vérifie $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1, \forall x \in \mathbb{Z}$
- Etudier les variations de la fonction partie entière
- Construire sa courbe représentative sur $[-3, 4[$

Partie B : Application

- Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$. Qu'en est-il sur $\mathbb{Z}^*$?
- En déduire que tout nombre réel est la limite d'une suite de nombres rationnels.

Partie C : Continuité, dérivabilité

- Déterminer les points de discontinuité de $\lfloor \cdot \rfloor$ puis son domaine de continuité.
- Déterminer le domaine de dérivabilité de $\lfloor \cdot \rfloor$ puis la valeur de la dérivée sur un intervalle inclus dans ce domaine.

Partie D : Partie décimale Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = x - \lfloor x \rfloor$

- Démontrer que pour tout réel x , $0 \leq d < 1$
- Démontrer que d est périodique.