

Concours blanc 2 du 09/06/26
Durée 4h, l'énoncé comporte **5 pages**

Exercice 1.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

On pose enfin $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $\frac{-1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.

- $\sqrt{5} > 1$ donc $\frac{\sqrt{5}+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$
- $x \rightarrow x^2 - x - 1$ est un trinôme de discriminant strictement positif, il a pour racines

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Par ailleurs, $\frac{-1}{\varphi} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = -\frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ est bien la seconde racine.

- Remarquons que comme φ est solution de l'équation, on obtient la relation (elle nous sera utile)

$$\varphi^2 = 1 + \varphi$$

2. Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier $n \geq 2$, elle calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

```

1 def suite(n):
2     v=0
3     w=1
4     for k in range(2,n+1):
5         c=v
6         v=w
7         w=c+v
8     return w

```

3. (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ "

- Initialisation : Vu que $u_2 = 1$, on obtient pour $n = 0$: $u_0 u_{0+2} - u_{0+1}^2 = -1 = (-1)^{0+1}$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Supposons la relation vraie pour un entier naturel n :
À l'aide de la relation de récurrence qui définit (u_n) on obtient,

$$\begin{aligned} u_{n+1} u_{n+3} - u_{n+2}^2 &= u_{n+1} (u_{n+2} + u_{n+1}) - u_{n+2} (u_{n+1} + u_n) \\ &= u_{n+1}^2 - u_{n+2} u_n \stackrel{HR}{=} -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} : \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par récurrence, on a montré que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Justifier qu'il existe des réels λ et μ , que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\varphi^n + \mu \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^n$$

- (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique a pour racines les réels φ et $-1/\varphi$: on sait alors qu'il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda\varphi^n + \mu \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^n$.
- Pour $n = 0$ on obtient : $\lambda + \mu = 0$ donc $\lambda = -\mu$ Pour $n = 1$ on obtient : $\lambda\varphi - \frac{\mu}{\varphi} = 1 \Leftrightarrow \lambda\varphi^2 - \mu = \varphi \Leftrightarrow \lambda(\varphi^2 + 1) = \varphi \Leftrightarrow \lambda = \frac{\varphi}{\varphi^2 + 1} = \dots = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{1}{\varphi}$.
- Ainsi, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \varphi^{n-1} + \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^{n+1}$$

(c) En déduire que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

- D'après la q??, $\left| \frac{-1}{\varphi} \right| < 1$ donc $u_n \sim \lambda\varphi^n$ et $u_{n+1} \sim \lambda\varphi^{n+1}$ en l'infini.
- Par quotient d'équivalents $\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \varphi$ donc la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ converge vers φ .

4. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$$

(a) Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\frac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.

- D'après la q3c, par produit d'équivalents, $u_n u_{n+1} \sim \lambda^2 \varphi^{2n+1}$ donc $\frac{1}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{1}{\lambda^2 \varphi}$ avec $\left(\frac{1}{\varphi^2} \right)^n \geq 0$: on reconnaît le terme d'une série géométrique convergente ($1/\lambda^2 < 1$).
- Par critère sur les équivalents de série de terme général positif, on obtient le résultat voulu.

(b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge.

La q4a permet d'établir la convergence absolue de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$ donc la convergence de la suite (S_n) qui est la somme partielle associée.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$$

D'après la relation de Chasles,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} u_{n+2}}$$

Or,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} = \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1} u_{n+2}} \stackrel{q3}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} u_{n+2}}$$

(d) Montrer que : $\varphi = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

D'après la q3c, par passage à la limite,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} S_{k+1} - S_k &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{u_{k+1}} - \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}} \\ \Leftrightarrow S_n - S_1 &= \frac{u_1}{u_2} - \frac{u_n}{u_{n+1}} \\ \Leftrightarrow S_n + 1 &= 1 - \frac{u_n}{u_{n+1}} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} = -\frac{1}{\varphi} = \dots = 1 - \varphi$$

Exercice 2.

On note $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid MK = KM = M\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

- $E \subseteq M_3(\mathbb{R})$
- E est non vide car la matrice nulle est dans E : $0 \times K = K \times 0 = 0$
- E est stable par combinaison linéaire. En effet, soient M et N deux matrices de E , $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda M + \mu N)K = \lambda MK + \mu NK = \lambda KM + \mu KN = K(\lambda M + \mu N)$$

puisque $KM = MK$ et KN et NK et enfin

$$(\lambda M + \mu N)K = \lambda MK + \mu NK = \lambda M + \mu N$$

puisque $MK = M$ et $NK = N$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de $M_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $M \in E$ si et seulement si $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$.

- On a $MK = \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix}$ et $KM = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

- Ainsi, $M \in E \Leftrightarrow MK = KM = M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ k & h & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & k \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = g = a \\ b = h \\ a = k = c \\ f = d \\ k = a = g \\ g = c = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = g = c = a \\ h = b \\ f = d \end{cases}$$

(b) Déterminer une base de E ainsi que sa dimension.

Ainsi, les matrices de E sont de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_2} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_3} + e \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_4}$$

Les 4 matrices précédentes forment une famille génératrice de E .

Vérifions que la famille est libre : soient a, b, d et e réels tels que $aM_1 + bM_2 + dM_3 + eM_4 = 0$.

D'après l'égalité précédente, on a alors $\begin{pmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ a & b & a \end{pmatrix} = 0$ et donc $a = b = d = e = 0$.

La famille est bien libre et ces 4 vecteurs forment une base de E : E est donc de dimension 4.

(c) Les matrices de E sont-elles inversibles ?

Non, puisque $M_4 \in E$ et M_4 non inversible : en effet, cette matrice est triangulaire avec un 0 sur la diagonale.

On considère F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$ où a, b et c sont trois réels.

On appelle U la matrice de F avec $a = 3, b = 2$ et $c = 4$.

3. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

Avec les notations de la question 2b, on remarque $M \in F \Leftrightarrow M = aM_1 + b(M_2 + M_3) + cM_4$: ainsi $F = \text{Vect}(M_1, M_2 + M_3, M_4)$. F est donc bien un sous-espace vectoriel de E puisque chacun de ces vecteurs est dans E . De plus $(M_1, M_2 + M_3, M_4)$ est une famille génératrice de F . Et il est clair que

$$aM_1 + b(M_2 + M_3) + cM_4 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

La famille est donc libre. Ainsi $(M_1, M_2 + M_3, M_4)$ est une base de F .

4. On note φ l'application

$$\varphi : \begin{cases} F \\ A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} \end{cases} \begin{array}{l} \rightarrow \mathbb{R} \\ \mapsto \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{i,j} \\ = a_{1,1} - a_{1,2} + a_{1,3} - a_{2,1} + a_{2,2} - a_{2,3} + a_{3,1} - a_{3,2} + a_{3,3} \end{array}$$

(a) Calculer $\varphi(U)$.

On a $U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminons la matrice $U' = ((-1)^{i+j} u_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3, \\ 1 \leq j \leq 3}}$:

$U' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; remarquons maintenant que $\varphi(U)$ est la somme de tous les coefficients de cette matrice U' .

On trouve donc $\varphi(U) = 8$

(b) Montrer que l'application φ est linéaire.

Le résultat est immédiat par linéarité de la somme (finie). En effet, soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de F , $\lambda \in \mathbb{R}$: on a $A + \lambda B = (a_{i,j} + \lambda b_{i,j})$ et donc

$$\varphi(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} (a_{i,j} + \lambda b_{i,j}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{i,j} + \lambda \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} b_{i,j} = \varphi(A) + \lambda \varphi(B)$$

(c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$ une matrice de F . Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de a, b et c et en déduire une base de $\text{Ker}(\varphi)$

- Avec les notations vues en 4a on a, si $M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$ alors $M' = \begin{pmatrix} a & -b & a \\ -b & c & -b \\ a & -b & a \end{pmatrix}$ et donc :

$$\varphi(M) = 4(a - b) + c$$

- Ainsi,

$$M \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow c = 4(b - a)$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 4(b - a) & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ces deux vecteurs, qui sont libres (car non colinéaires et au nombre de deux), forment donc une base du noyau de φ .

(d) Montrer que φ est surjective.

Comme l'application linéaire φ est à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}$, elle est de rang 0 ou 1.

Si elle était de rang 0, elle serait l'application nulle, et comme $\varphi(U) = 8 \neq 0$, elle est de rang 1 : ainsi $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et φ est surjective.

(Remarque on peut également utiliser le théorème du rang).

Exercice 3.

On définit sur l'intervalle $]0; 1]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x \ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = e^{x \ln(x)}$.

1. (a) Les fonctions f et g admettent-elles des limites en 0 ?

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

Par composition avec la limite $\lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

f et g admettent donc des limites (finies) en 0.

(b) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0; 1]$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f'(x) = \ln(x) + 1$.

$f'(x) > 0$ ssi $\ln x > -1$ ssi $x > e^{-1}$. On a le tableau de variations suivant :

x	0	e^{-1}	1
$f'(x)$	-	0	+
f	0	$-e^{-1}$	0

g est dérivable sur $]0, 1]$ et pour $x > 0$, $g'(x) = f'(x)e^{x \ln x}$. $g'(x)$ est du signe de $f'(x)$. On a le tableau de variations suivant :

x	0	e^{-1}	1
$g'(x)$	-	0	+
g	1	$e^{-\frac{1}{e}}$	1

(c) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 g(t)dt$ est convergente. On notera I sa valeur.

g est continue sur $]0, 1]$ et admet une limite finie en 0 ; g est donc prolongeable par continuité en 0. L'intégrale $\int_0^1 g(t) dt$ est donc convergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (t \ln(t))^n dt$$

et :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

(a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto (f(t))^n$ est continue sur $]0, 1]$ et admet une limite finie en 0 (valant 0 si $n \in \mathbb{N}^*$ et 1 si $n = 0$). La fonction f^n est donc prolongeable par continuité en 0. L'intégrale $\int_0^1 [f(t)]^n dt$ converge.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Par l'étude de fonction de la question 1.b., on a $-\frac{1}{e} \leq t \ln t \leq 0$ pour tout $t \in]0, 1]$. Pour tout $t \in]0, 1]$, on a donc :

$$\begin{aligned} |t \ln t| &\leq e^{-1} \\ \implies |t \ln t|^n &\leq e^{-n} \text{ par croissance de la fonction } x \mapsto x^n \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ \iff |(t \ln t)^n| &\leq e^{-n} \end{aligned}$$

La fonction $|f^n|$ est continue sur $]0, 1]$ et admet une limite finie en 0, donc l'intégrale $\int_0^1 |(t \ln t)^n| dt$ converge.

Par croissance de l'intégrale, on a : $\int_0^1 |(t \ln t)^n| dt \leq \int_0^1 e^{-n} dt$, soit $\int_0^1 |(t \ln t)^n| dt \leq e^{-n}$.

Par l'inégalité triangulaire :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 |(t \ln t)^n| dt \leq \frac{e^{-n}}{n!}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$. Sans forme indéterminée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{n!} = 0$.

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite u converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

(c) Calculer u_0 et u_1 .

$u_0 = \int_0^1 1 dt = 1$ et $u_1 = \int_0^1 t \ln t dt$. Pour calculer cette intégrale, effectuons une intégration par parties, en revenant bien aux intégrales partielles. Soit $A \in]0, 1[$. Les fonctions u et v

suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, 1]$:

$$\begin{aligned} u : t \mapsto \frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad v : t \mapsto \ln t \\ u'(t) = t \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_A^0 t \ln t \, dt &= \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_A^1 - \int_A^1 \frac{t}{2} \, dt \\ &= -\frac{1}{2} A^2 \ln A - \left[\frac{t^2}{4} \right]_A^1 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{A^2}{4} - \frac{A^2 \ln A}{2} \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim_{A \rightarrow 0} A^2 \ln A = 0$. En faisant tendre A vers 0, nous obtenons

$$u_1 = -\frac{1}{4}.$$

(d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Soit $A \in]0, 1[$. On effectue une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, 1]$:

$$\begin{aligned} u : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad v : t \mapsto (\ln t)^n \\ u'(t) = t^n \quad v'(t) = \frac{n}{t} (\ln t)^{n-1}. \\ \int_A^1 t^n (\ln t)^n \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} (\ln t)^n \right]_A^1 - \int_A^1 \frac{n t^{n+1} (\ln t)^{n-1}}{(n+1)t} \, dt \\ = -\frac{A^{n+1} (\ln A)^n}{n+1} - \frac{n}{n+1} \int_A^1 t^n (\ln t)^{n-1} \, dt \end{aligned}$$

Par croissances comparées $\lim_{A \rightarrow 0} A^{n+1} (\ln A)^n = 0$. En faisant tendre A vers 0, nous obtenons :

$$n! u_n = -\frac{n}{n+1} \int_0^1 t^n (\ln t)^{n-1} \, dt$$

Nous réitérons, comme indiqué, l'intégration par parties sur le segment $[A, 1]$, avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, 1]$:

$$\begin{aligned} u : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad v : t \mapsto (\ln t)^{n-1} \\ \int_A^1 t^n (\ln t)^{n-1} \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} (\ln t)^{n-1} \right]_A^1 - \int_A^1 \frac{(n-1) t^{n+1} (\ln t)^{n-2}}{(n+1)t} \, dt \\ = -\frac{A^{n+1} (\ln A)^{n-1}}{n+1} - \frac{n(n-1)}{n+1} \int_A^1 t^n (\ln t)^{n-2} \, dt \end{aligned}$$

Par croissances comparées $\lim_{A \rightarrow 0} A^{n+1}(\ln A)^{n-1} = 0$, et en faisant tendre A vers 0, nous obtenons :

$$n!u_n = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \int_0^1 t^n (\ln t)^{n-2} dt$$

En continuant ce procédé, nous avons pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$n!u_n = (-1)^k \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+1)^k} \int_0^1 t^n (\ln t)^{n-k} dt$$

En particulier pour $k = n$, on obtient

$$n!u_n = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^n} \int_0^1 t^n dt = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^n} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

- (e) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

$$\text{Pour } n \geq 1, \quad |u_n| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. On a $0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ converge. Donc la série de terme général u_n converge absolument et donc converge.

- (f) Écrire une fonction Python `somme` qui prend en paramètre d'entrée un entier naturel n et qui produit en paramètre de sortie la valeur de S_n .

```

1 def somme(n):
2     S=0
3     for k in range(0,n+1):
4         S=S+(-1)**k/(k+1)**(k+1)
5     return S

```

3. (a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle, montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et tout entier naturel n :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons $I = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et $f : t \mapsto e^t$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I , et pour tout $t \in I$, $|f^{(n+1)}(t)| = e^t \leq 1$. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n , pour tout $x \in I$, on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k \right| \leq \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pour tout entier naturel k , $f^{(k)} = f$. Pour $x \in I$, on a $|x| \leq \frac{1}{e}$, puis $|x|^{n+1} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$ et donc :

$$\forall x \in I, \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |I - S_n| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

Soit $x \in]0, 1]$. Par l'étude de la question 1.b., $x \ln x \in [-\frac{1}{e}, 0]$. On peut appliquer le résultat de la question précédente :

$$\left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^n \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

Les fonctions $x \mapsto \left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^n \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right|$ et $x \mapsto \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$ sont continues sur $]0, 1]$

et l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} dx$ est convergente. Par le théorème de comparaison pour des

intégrales de fonctions continues positives, l'intégrale $\int_0^1 \left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^n \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| dx$ converge.

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^n \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| dx \leq \int_0^1 \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} dx$$

soit

$$\int_0^1 \left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^n \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| dx \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

Par ailleurs, par linéarité pour des intégrales convergentes, $I - S_n = \int_0^1 \left(e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^n \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right) dx$.

On termine par l'inégalité triangulaire :

$$|I - S_n| \leq \int_0^1 \left| e^{x \ln x} - \sum_{k=0}^n \frac{(x \ln x)^k}{k!} \right| dx \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$$

(c) Montrer que :

$$I = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

Sans forme indéterminée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} = 0$. Le théorème d'encadrement appliqué à l'encadrement de la question précédente donne : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I$.

Ainsi $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} = I$. Le changement d'indice $n = k+1$ donne :

$$I = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$$

- (d) Écrire une fonction Python nommée `estimation` qui prend comme paramètre d'entrée un réel strictement positif `eps` et qui produit en paramètre de sortie une valeur approchée de I à `eps` près.

```
1 def estimation(eps):
2     n=0
3     majorant=1
4     while majorant>eps:
5         n=n+1
6         majorant=majorant*1/(np.exp(1)*(n+1))
7     return somme(n)
```

Exercice 4.

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : deux boules sont bleues, deux boules sont rouges, deux boules sont jaunes. On effectue une succession de tirages de deux boules successivement et sans remise dans cette urne selon le protocole suivant :

- si les deux boules sont de la même couleur, elles sont définitivement sorties de l'urne,
- si les deux boules sont de couleurs différentes, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) nécessaires pour obtenir une première paire de boules de la même couleur.

On note Y_2 (respectivement Y_3) le nombre de tirages (de deux boules) nécessaires pour obtenir une deuxième (respectivement une troisième) paire de boules de la même couleur, à partir de l'obtention de la première (respectivement de la deuxième) paire de boules de la même couleur.

On remarquera que Y_3 est une variable aléatoire constante et que $Y_3 = 1$.

On admettra que les variables Y_1, Y_2, Y_3 sont indépendantes.

Enfin, on note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider complètement l'urne.

Par exemple, si les résultats successifs sont $(R_1, B_1), (B_1, J_2), (J_1, J_2), (B_1, R_2), (R_1, B_2), (R_1, R_2), (B_1, B_2)$ alors Y_1 prend la valeur 3, Y_2 prend la valeur 3, Y_3 prend la valeur 1 et X prend la valeur 7.

1. *Loi de Y_1*

- (a) Calculer la probabilité d'obtenir une paire de boules de la même couleur lors du premier tirage (de deux boules).

Notons A l'évènement « Obtenir une paire de boules de la même couleur lors du premier tirage ». On est dans une situation d'équiprobabilité car les boules sont indiscernables.

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{nombre de paires}}{\text{nombre de tirages possibles}} \\ &= \frac{3}{\binom{6}{2}} \\ &= \frac{3}{15} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

- (b) Justifier que la variable aléatoire Y_1 suit une loi usuelle. De quel(s) paramètre(s) ?
Vérifier que $E(Y_1) = 5$. Que vaut la variance de Y_1 ?

On considère l'expérience de Bernoulli « Piocher deux boules simultanément dans l'urne » et on appelle succès l'évènement A , de probabilité $p = \frac{1}{5}$. On répète cette expérience de manière indépendante jusqu'à obtenir un succès et Y_1 est le rang du premier succès donc Y_1 suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{5}$.

Ainsi, Y_1 admet une espérance et $E(Y_1) = \frac{1}{p} = 5$.

De plus, Y_1 admet une variance et $V(Y_1) = \frac{1-p}{p^2} = 20$.

2. Loi de Y_2

Dans cette question, on suppose que la première paire de boules de la même couleur a été obtenue et retirée de l'urne. Il reste ainsi quatre boules dans l'urne, deux pour chaque couleur restante.

- (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une paire de boules de la même couleur en un seul tirage (de deux boules) ?

Notons B l'évènement « Obtenir une paire de boules de la même couleur lors du premier tirage ». On est dans une situation d'équiprobabilité car les boules sont indiscernables.

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{\text{nombre de paires}}{\text{nombre de tirages possibles}} \\ &= \frac{2}{\binom{4}{2}} \\ &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- (b) Déterminer la loi de Y_2 . Quelle est son espérance ?
Vérifier que $V(Y_2) = 6$.

On considère l'expérience de Bernoulli « Piocher deux boules simultanément dans l'urne après le retrait d'une paire » et on appelle succès l'évènement B , de probabilité $p' = \frac{1}{3}$. On répète cette expérience de manière indépendante jusqu'à obtenir un succès et Y_2 est le rang du premier succès donc Y_2 suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

Ainsi, Y_2 admet une espérance et $E(Y_2) = \frac{1}{p'} = 3$.

De plus, Y_2 admet une variance et $V(Y_2) = \frac{1-p'}{p'^2} = 6$.

3. Loi de X

- (a) Quelle relation lie la variable aléatoire X aux variables aléatoires Y_1, Y_2, Y_3 ?

D'après l'énoncé, on a $X = Y_1 + Y_2 + Y_3$.

- (b) En déduire que $E(X) = 9$. Que vaut $V(X)$?

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(X) = E(Y_1 + Y_2 + Y_3) = E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) = 5 + 3 + 1 = 9.$$

En effet, Y_3 suit une loi certaine égale à 1 donc $E(Y_3) = 1$ et $V(Y_3) = 0$.

(c) Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Justifier chaque égalité ci-dessous :

$$P(X = k) = P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \sum_{i=1}^{k-2} P(Y_1 = i)P(Y_2 = k - 1 - i)$$

Indication : On remarquera que :

$$[Y_1 + Y_2 = k - 1] = \bigcup_{i=1}^{k-2} ([Y_1 = i] \cap [Y_2 = k - 1 - i])$$

Soit k un entier supérieur ou égal à 3. On a :

$$P(X = k) = P(Y_1 + Y_2 + Y_3 = k) = P(Y_1 + Y_2 + 1 = k) = P(Y_1 + Y_2 = X - 1).$$

On considère le système complet d'évènements associé à $Y_1 : \{Y_1 = i, i \in \mathbb{N}^*\}$ et on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(Y_1 + Y_2 = X - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y_1 = i, Y_1 + Y_2 = k - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{k-2} P(Y_1 = i, Y_2 = k - 1 - i) \text{ car } Y_2 = k - 1 - i \geq 1 \iff k - 2 \geq i \\ &= \sum_{i=1}^{k-2} P(Y_1 = i)P(Y_2 = k - 1 - i) \text{ par indépendance de } Y_1 \text{ et } Y_2. \end{aligned}$$

(d) En déduire que :

$$\forall k \geq 3, \quad P(X = k) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4}{5} \right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} \right]$$

On continue le calcul en utilisant les lois de Y_1 et Y_2 déterminées plus haut :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{i=1}^{k-2} P(Y_1 = i) \times P(Y_2 = k-1-i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{1}{5} \right) \left(\frac{4}{5} \right)^{i-1} \times \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right)^{(k-1-i)-1} \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{4}{5} \right)^i \left(\frac{2}{3} \right)^{-i} \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{4}{5} \times \frac{3}{2} \right)^i \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{6}{5} \right)^i \\ &= \frac{1}{12} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} \frac{6}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{6}{5} \right)^{k-2}}{1 - \frac{6}{5}} \text{ par somme des termes d'une suite géométrique} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} \times \left(1 - \left(\frac{6}{5} \right)^{k-2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} \left(\frac{6}{5} \right)^{k-2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} \right)^{k-2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{4}{5} \right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} \right). \end{aligned}$$

4. Informatique

- (a) Compléter ce script `Python` afin qu'il calcule et affiche les probabilités $P(X = k)$ pour $k \in \llbracket 3, 22 \rrbracket$.

```
1 u=np.zeros(20)
2 for k in range(3,23):
3     u[k] = 1/2*((4/5)**(k-2)-(2/5)**(k-2))
4 plt.plot(u, 'r')
```

Le graphique obtenu en sortie est présent sur la figure 1 (page suivante).

Quelle semble être la valeur la plus probable de X ?

La valeur la plus probable semble être $X = 5$, car c'est le point qui a l'ordonnée la plus grande.

- (b) La figure 2 affiche les vingt valeurs de la fonction de répartition de X aux points d'abscisses entières comprises entre 3 et 22.

Déterminer graphiquement un réel m tel que $P(X \leq m) = P(X \geq m)$.

On cherche l'abscisse du point en lequel la fonction de répartition vaut 0.5 et on trouve $X = 7$.

Figure 1

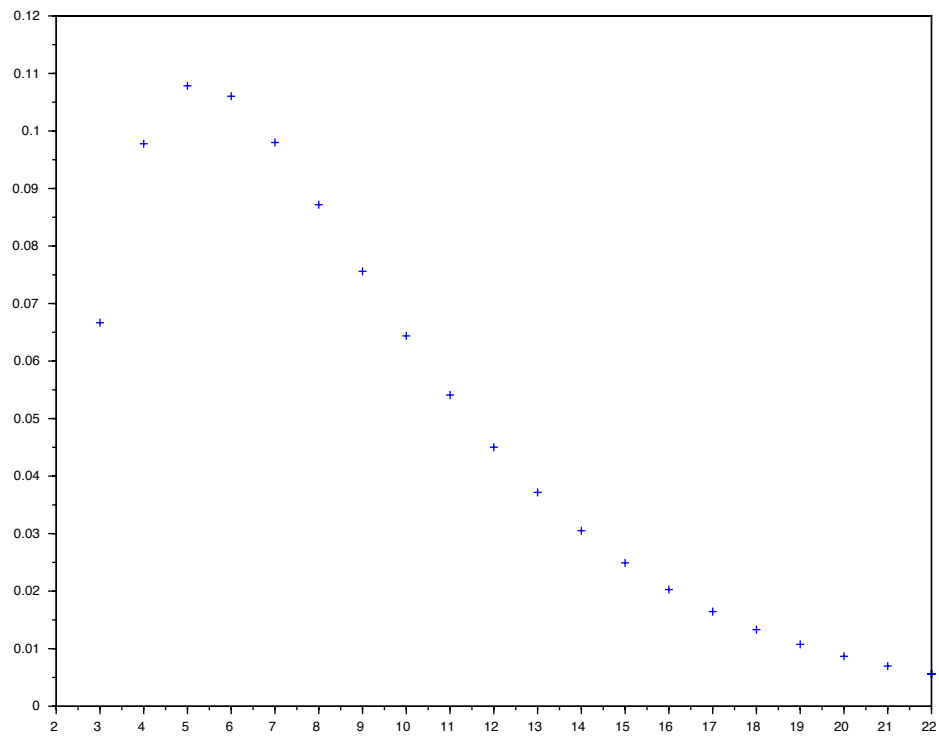


Figure 2

