

Concours blanc 2 du 09/06/26
Durée 4h, l'énoncé comporte **5 pages**

Exercice 1

Dans tout l'exercice α est un nombre réel.

1. Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente.

Par croissance comparée on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^n}{n^\alpha}}{\sqrt[n]{|x|}^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{|x|}}{n^\alpha} = 0$$

Ainsi $\frac{x^n}{n^\alpha} = o(\sqrt[n]{|x|}^n)$. Or $\sum \sqrt[n]{|x|}^n$ converge comme somme géométrique de raison $\sqrt[n]{|x|} \in]-1, 1[$.
Donc par critère de négligeabilité des séries de termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ converge.

Dans la suite de l'exercice, pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose : $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$.

2. Expliciter les fonctions f_0 et f_{-1} .

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$$

$$f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^{-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \frac{1}{(1-x)^2}$$

Dans la suite de l'exercice, on suppose que α appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

3. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?

Comme $\alpha \in]0, 1[$ par série de Riemann, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

4. En utilisant le fait que $x^t = e^{t \ln(x)}$, justifier que, pour tout $x \in]0, 1[$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt$ est convergente.

Soit $u_{x,\alpha}$ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u_{x,\alpha}(t) = \frac{x^t}{t^\alpha} = \frac{e^{t \ln(x)}}{t^\alpha}$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. Alors f est continue sur $]0; +\infty[$. L'intégrale possède donc deux bornes impropres. Soit $c > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt = \int_0^c \frac{x^t}{t^\alpha} dt + \int_c^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt$$

Etudions d'une part $\int_0^c \frac{x^t}{t^\alpha} dt$. $u_{x,\alpha}(t) = \frac{x^t}{t^\alpha} = \frac{e^{t \ln(x)}}{t^\alpha} \sim_0 \frac{1}{t^\alpha}$. Or $\int_0^c \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente par intégrale de Riemann. Donc par critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives, $\int_0^c \frac{x^t}{t^\alpha} dt$ converge.

D'autre part, étudions, $\int_c^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt$. Comme $\alpha > 0$, $\frac{x^t}{t^\alpha} = \frac{e^{t \ln(x)}}{t^\alpha} = o_{+\infty}(e^{t \ln(x)})$. De plus, pour tout $x \in]0; 1[$, $\ln(x) < 0$, donc $\int_c^{+\infty} e^{t \ln(x)} dt$ converge. Et donc par le critère de négligeabilité des intégrales de fonctions positives, $\int_c^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt$ converge.

Finalement par la relation de Chasles, $\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}$ converge.

Dans la suite de l'exercice, pour tout $x \in]0, 1[$, on pose :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt.$$

5. Soit la fonction Γ d'Euler, définie par :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

On admet que cette fonction est définie correctement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in]0, 1[$. Démontrer que :

$$I(x) = (-\ln(x))^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha).$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{t \ln(x)}}{t^\alpha} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{-\alpha} e^{t \ln(x)} dt \end{aligned}$$

Soit $\varphi : t \mapsto -t \ln(x)$, alors φ est $\mathcal{C}^1$, bijective et croissante (car $\ln(x) < 0$) sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. Ainsi par changement de variable $u = -t \ln(x)$, $du = -\ln(x) dx$.

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{-\ln(x)} \right)^{-\alpha} e^{-u} \frac{du}{-\ln(x)} \\ &= (-\ln(x))^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} u^{-\alpha} e^{-u} du \\ &= (-\ln(x))^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \end{aligned}$$

6. Soit $x \in]0, 1[$. On considère la fonction $u_{x,\alpha}$ définie pour $t > 0$ par : $u_{x,\alpha}(t) = \frac{x^t}{t^\alpha}$.

(a) Démontrer que la fonction $u_{x,\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$u_{x,\alpha}(t) = \frac{x^t}{t^\alpha} = \frac{e^{t \ln(x)}}{t^\alpha}$, donc $u_{x,\alpha}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas et :

$$\begin{aligned} u'_{x,\alpha}(t) &= \frac{\ln(x) e^{t \ln(x)} t^\alpha - e^{t \ln(x)} \alpha t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} \\ &= \frac{(\ln(x)t - \alpha) e^{t \ln(x)} t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} \\ &= \frac{(\ln(x)t - \alpha) e^{t \ln(x)}}{t^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

Or comme $x \in]0, 1[$, $\ln(x) < 0$, donc, comme $\alpha > 0$, $\ln(x)t - \alpha < 0$ pour tout $t > 0$ et donc $u'_{x,\alpha}(t) < 0$ pour tout $t > 0$. Ainsi $u_{x,\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que :

$$u_{x,\alpha}(k+1) \leq \int_k^{k+1} u_{x,\alpha}(t) dt \leq u_{x,\alpha}(k)$$

Comme $u_{x,\alpha}$ est décroissante, pour tout $t \in [k, k+1]$, $u_{x,\alpha}(k+1) \leq u_{x,\alpha}(t) \leq u_{x,\alpha}(k)$. Ainsi

$$\int_k^{k+1} u_{x,\alpha}(k+1)dt \leq \int_k^{k+1} u_{x,\alpha}(t)dt \leq \int_k^{k+1} u_{x,\alpha}(k)dt$$

Soit :

$$u_{x,\alpha}(k+1) \leq \int_k^{k+1} u_{x,\alpha}(t)dt \leq u_{x,\alpha}(k)$$

et en déduire l'encadrement : $f_\alpha(x) - x \leq \int_1^{+\infty} u_{x,\alpha}(t)dt \leq f_\alpha(x)$.

En sommant 6b sur k , on obtient :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_{x,\alpha}(k+1) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} u_{x,\alpha}(t)dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_{x,\alpha}(k)$$

Soit, par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^\alpha} \leq \int_1^{+\infty} u_{x,\alpha}(t)dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^\alpha}$$

Et donc, par changement d'indice

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{k^\alpha} \leq \int_1^{+\infty} u_{x,\alpha}(t)dt \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^\alpha}$$

Et donc

$$f_\alpha(x) - x \leq \int_1^{+\infty} u_{x,\alpha}(t)dt \leq f_\alpha(x)$$

- (c) Démontrer l'encadrement : $I(x) - \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leq f_\alpha(x) \leq I(x)$

Par la question précédente, on a :

$$f_\alpha(x) \geq \int_1^{+\infty} u_{x,\alpha}(t)dt = \int_0^{+\infty} u_{x,\alpha}(t)dt - \int_0^1 u_{x,\alpha}(t)dt = I(x) - \int_0^1 u_{x,\alpha}(t)dt$$

De plus

$$f_\alpha(x) \leq \int_1^{+\infty} u_{x,\alpha}(t)dt + x$$

Or

$$\int_0^1 u_{x,\alpha}(t)dt = \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} dt \geq \int_0^1 u_{x,\alpha}(1)dt = \int_0^1 x dt = x$$

Car $u_{x,\alpha}$ est décroissante.

$$\text{Ainsi } f_\alpha(x) \leq \int_1^{+\infty} u_{x,\alpha}(t)dt + \int_0^1 u_{x,\alpha}(t)dt = I(x)$$

- (d) Déterminer un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, à l'aide de la fonction Γ .

En combinant les question 6.c et 5. on obtient :

$$(-\ln(x))^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) - \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leq f_\alpha(x) \leq (-\ln(x))^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$$

Or $\lim_{x \rightarrow 1^-} (-\ln(x))^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 1^-} -\ln(x) = 0^+$ et $\alpha - 1 < 0$. Et $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge,

donc $\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} dt = o_1((-\ln(x))^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha))$. Et donc

$$(-\ln(x))^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) - \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} dt \underset{1}{\sim} (-\ln(x))^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)$$

Par théorème d'encadrement :

$$f_\alpha(x) \underset{1}{\sim} (-\ln(x))^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)$$

Exercice 2

1. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - Id)^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

- (a) Déterminer $(f - Id)^2 + f \circ (2Id - f)$.

$$\begin{aligned} (f - Id)^2 + f \circ (2Id - f) &= (f - Id) \circ (f - Id) + f \circ (2Id - f) \\ &= f^2 - f - f + Id + 2f - f^2 = Id \end{aligned}$$

- (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, x = (f - Id)^2(x) + (f \circ (2Id - f))(x)$.

On applique l'égalité précédente en x , on obtient :

$$(f - Id)^2(x) + (f \circ (2Id - f))(x) = x$$

- (c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ alors par la question précédente :

$$x = (f - Id)^2(x) + f((2Id - f)(x))$$

Posons $u = (f - Id)^2(x)$ et $v = f((2Id - f)(x))$. Alors il est clair que $v \in \text{Im}(f)$. Montrons que $u \in \ker(f)$. En effet

$$f(u) = f((f - Id)^2(x)) = f \circ (f - Id)^2(x) = 0$$

car $f \circ (f - Id)^2 = 0$. On a donc $\mathbb{R}^n = \ker(f) + \text{Im}(f)$.

De plus par le théorème du rang : $\dim \mathbb{R}^n = \dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f)$. On a donc

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n = \ker(f) + \text{Im}(f) \\ \dim \mathbb{R}^n = \dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f) \end{cases}$$

Donc

$$\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$$

2. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$f \circ (f - Id) \circ (f - 4Id) = 0$$

- (a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant :

$$\frac{1}{4}(X - 1)(X - 4) + XP(X) = 1$$

On cherche $P = aX + b$ tel que $\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(X-1)(X-4) + X(aX+b) = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(X^2 - 5X + 4) + aX^2 + bX = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} + a\right)X^2 + \left(\frac{-5}{4} + b\right)X + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{5}{4} \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $P = -\frac{1}{4}X + \frac{5}{4}$

(b) En déduire que : $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$

En s'inspirant de la question 1, on applique l'égalité polynômiale précédente en f . Cela donne :

$$\frac{1}{4}(f - Id) \circ (f - 4Id) + f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}Id\right) = Id$$

Donc si $x \in \mathbb{R}^n$, alors

$$x = \frac{1}{4}(f - Id) \circ (f - 4Id)(x) + f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}Id\right)(x)$$

En posant $u = \frac{1}{4}(f - Id) \circ (f - 4Id)(x)$ et $v = f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}Id\right)(x) = f \left(\left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}Id\right)(x)\right)$.

Alors $v \in \text{Im}(f)$. Or

$$f(u) = f\left(\frac{1}{4}(f - Id) \circ (f - 4Id)(x)\right) = \frac{1}{4}f \circ (f - Id) \circ (f - 4Id)(x) = 0$$

Donc $u \in \ker(f)$. Ainsi $\mathbb{R}^n = \ker(f) + \text{Im}(f)$ et le théorème du rang nous dit que $\dim \mathbb{R}^n = \dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f)$. Donc

$$\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$$

3. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f , dont le degré est égal à p (avec $p \geq 2$), et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

(a) Montrer qu'il existe p réels $a_1, \dots, a_p \neq 0$ avec $a_1 \neq 0$ tels que $P = a_1X + \dots + a_pX^p$.

Soit p le degré de P alors, il existe $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ tels que $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$. Or, on a :

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P'(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 \neq 0 \end{cases}$$

D'où le résultat.

(b) En déduire que $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Soit $u \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$. Alors $\exists v_u \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(v_u) = u$ car $u \in \text{Im}(f)$ et $f(u) = 0$ car $u \in \ker(f)$. En combinant ces deux informations, on obtient que $u = f(v_u)$ et $f^2(v_u) = f(f(v_u)) = f(u) = 0$.

Alors $f^k(v_u) = 0$ pour tout $k \geq 2$ en effet $f^k(v_u) = f^{k-2}(f^2(v_u)) = f^{k-2}(0) = 0$.

Or $P(f) = 0$ ainsi pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $P(f)(v) = 0$. En particulier vrai pour v_u . On a donc :

$$P(f)(v_u) = 0 = a_1f(v_u) + a_2f^2(v_u) \dots + a_pf^p(v_u)$$

Et donc $a_1 f(v_u) = 0$. Or $a_1 \neq 0$, ainsi $f(v_u) = 0$ soit $u = 0$. Et donc

$$\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$$

De plus le théorème du rang nous donne $\dim \ker(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^n$. Ainsi

$$\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^n$$

(c) En quoi cette question est une généralisation des deux questions précédentes ?

Pour la question 1 le polynôme $P = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de f vérifiant les conditions de la q3. Et pour la question 2 le polynôme $X(X-1)(X-4)$ vérifie les conditions de la q3. Donc la question 3 généralise bien les cas des questions 1 et 2.

Problème.

Ce problème est constitué de trois parties.

Les parties B et C sont indépendantes l'une de l'autre mais utilisent certains résultats de la partie A.

On rappelle que, pour tout (k, n) de $\mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note c_n le réel, appelé le nombre de Catalan d'ordre n , défini par :

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

PARTIE A : Quelques propriétés sur les nombres de Catalan 1.

1. Calculer les réels c_0, c_1 et c_2 .

Connaissant les propriétés des coefficients binomiaux, on a $c_0 = \frac{1}{1} \binom{0}{0} = 1, c_1 = \frac{1}{2} \binom{2}{1} = 1$ et $c_2 = \frac{1}{3} \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{3 \times 2} = 2$.

2. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.

Pour $n = 0$, on a $\binom{0}{0} - \binom{0}{1} = 1 - 0 = 1 = c_0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque $n \leq 2n$ et $n+1 \leq 2n$, donc on peut utiliser les expressions avec les factorielles de sorte que

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{1}{n(n+1)} \right) = \frac{(2n)!}{n!n!} \times \frac{1}{n+1} = c_n \end{aligned}$$

(b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, c_n est un entier naturel non nul.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ donc c_n est un nombre strictement positif.

Comme $c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$, on voit que c_n est une différence de deux entiers donc c_n est un entier.

Finalement, c_n est un entier naturel non nul.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{1}{n+2} \binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{n+2} \times \frac{(2n+2) \times (2n+1) \times (2n)!}{(n+1)^2 (n!) (n!)} \\ &= \frac{1}{n+2} \times \frac{2(n+1)}{n+1} \times (2n+1) \times \left(\frac{1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{(n!)(n!)} \right) = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n. \end{aligned}$$

4. Ecrire une fonction Python `catalan` prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$ et renvoyant la valeur de c_n .

On utilise la formule de la question (3). Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on remplace n par $k-1 \in \mathbb{N}$, cela donne $c_k = \frac{2(2(k-1)+1)}{k-1+2} c_{k-1} = \frac{2(2k-1)}{k+1} c_{k-1}$. On propose

```
def catalan(n):
    c=1
    for k in range(1,n+1):
        c=2*(2*k-1)*c/(k+1)
    return c
```

5. (a) Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} - c_n = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n - c_n = c_n \left(\frac{2(2n+1)}{n+2} - 1 \right) = c_n \left(\frac{2(2n+1)-(n+2)}{n+2} \right) = \frac{3n}{n+2} c_n \geq 0$.

Donc la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- (b) A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc soit elle converge soit elle diverge vers $+\infty$.

Supposons qu'elle converge vers une limite réelle que l'on note ℓ .

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n = \frac{4n+2}{n+2} c_n = 4 \times \frac{n+\frac{1}{2}}{n+2} c_n = 4 \times \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{2}{n}} c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4\ell$.

Or $c_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, par unicité de la limite, on a $4\ell = \ell$ donc $3\ell = 0$ et $\ell = 0$. Cela contredit le fait que $0 < c_0 = 1$ et que la suite soit croissante. Donc $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger donc elle diverge vers $+\infty$.

6. (a) Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 4 \left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 4 \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{3/2}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, avec la question (3), $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{4k+2}{k+2} = 4 \frac{k+\frac{1}{2}}{k+2}$.

Donc il suffit de montrer que $\left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{k+\frac{1}{2}}{k+2} \leq \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{3/2}$.

La fonction $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc il suffit de montrer que

$$\left(\frac{k}{k+1} \right)^3 \leq \left(\frac{k+\frac{1}{2}}{k+2} \right)^2 \leq \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^3.$$

Nous allons tout d'abord comparer $k^3(k+2)^2$ avec $(k+1)^3(k+\frac{1}{2})^2$.

On a $k^3(k+2)^2 = k^5 + 4k^4 + 4k^3$, puis

$$\begin{aligned} (k+1)^3 \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \left(k^2 + k + \frac{1}{4} \right) \\ &= \left(k^5 + k^4 + \frac{1}{4}k^3 \right) + \left(3k^4 + 3k^3 + \frac{3}{4}k^2 \right) + \left(3k^3 + 3k^2 + \frac{3}{4}k \right) + \left(k^2 + k + \frac{1}{4} \right) \\ &= k^5 + 4k^4 + 4k^3 + a_k = k^3(k+2)^2 + a_k \end{aligned}$$

où a_k est une somme de réels positifs.

Donc $k^3(k+2)^2 \leq (k+1)^3(k+\frac{1}{2})^2$, en divisant par $(k+2)^2(k+1)^3 > 0$ on a bien $\left(\frac{k}{k+1} \right)^3 \leq \left(\frac{k+\frac{1}{2}}{k+2} \right)^2$.

On peut alors composer par la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}^+$ ce qui donne

$$\left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{k+\frac{1}{2}}{k+2}.$$

Il reste à montrer que $\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{k+2} \right)^2 \leq \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^3$, pour cela on compare $(k+\frac{1}{2})^2(k+2)$ et $(k+1)^3$. On développe

$$\left(k + \frac{1}{2} \right)^2 (k+2) = \left(k^2 + k + \frac{1}{4} \right) (k+2) = k^3 + 3k^2 + \frac{9}{4}k + \frac{1}{2}$$

et

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1.$$

Donc

$$(k+1)^3 - \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 (k+2) = 3k+1 - \left(\frac{9}{4}k + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}k + \frac{1}{2} > 0.$$

Donc $\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 (k+2) \leq (k+1)^3$, on divise par $(k+2)^3 > 0$ et $\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{k+2}\right)^2 \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^3$. On compose par la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}^+$ ce qui donne

$$\frac{k + \frac{1}{2}}{k+2} \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{3/2}.$$

Finalement

$$4 \left(\frac{k}{k+1}\right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 4 \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{3/2}.$$

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}.$

On fait une preuve par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathcal{H}_n : \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}.$$

Pour $n = 1$, on calcule $\frac{1}{4} \frac{4}{1} = 1 = c_1$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4}{1} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} > 1$ donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

Supposons $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$ vraies pour un $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $c_n > 0$ donc avec la question précédente

$$4 \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/2} c_n \leq c_{n+1} \leq 4 \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3/2} c_n.$$

On utilise ensuite $\mathcal{H}_n$,

$$4 \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/2} \times \underbrace{\frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}}_{\leq c_n} \leq 4 \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/2} c_n \leq c_{n+1} \leq 4 \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3/2} c_n \leq 4 \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3/2} \times \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}}_{\geq c_n}.$$

Donc

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{3/2} \times 4^{n+1} \leq c_{n+1} \leq 4 \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3/2} c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{n+1}{(n+2)n}\right)^{3/2} \times 4^{n+1}.$$

On ne peut pas conclure pour la majoration car $\frac{n+1}{(n+2)n} > \frac{1}{n+1}$.

On va utiliser un télescopage, on a

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{c_{n+1}}{c_n} \times \frac{c_n}{c_{n-1}} \times \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} \times \dots \times \frac{c_3}{c_2} \times \frac{c_2}{c_1} \times c_1 \\ &\leq \left(4 \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3/2} 4 \left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/2} \dots 4 \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} 4 \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\right) c_1 \\ &\leq 4^n \left(\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k+2}\right)^{3/2} = 4^n \left(\frac{2}{n+2}\right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Le 4 est bien à la puissance n car il y a n facteurs dans le produit. Ensuite

$$c_{n+1} \leq 4^{n+1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{4(n+2)^{3/2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^{n+1}}{(n+1)^{3/2}}.$$

Finalement $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Bilan : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}.$$

7. On note, pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k}$.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \frac{n}{2} S_n$

(on pourra effectuer le changement d'indice $i = n - k$ dans la somme définissant T_n).

Pour $n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k}$, on pose $i = n - k$, on a alors

$$T_n = \sum_{i=0}^n (n-i) c_i c_{n-i} = n \sum_{i=0}^n c_i c_{n-i} - \sum_{i=0}^n i c_i c_{n-i} = n S_n - T_n$$

donc $2T_n = n S_n$ et $T_n = \frac{n}{2} S_n$.

(b) Montrer à l'aide de l'égalité de la question 3. : $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec la question 3, on a

$$c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n.$$

On l'applique à $c_k = c_{k-1+1}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ainsi $k \in \mathbb{N}^*$. Donc, en isolant le terme en 0, il vient

$$\begin{aligned} T_{n+1} + S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} k c_k c_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k c_{n+1-k} \\ &= c_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) \frac{2(2(k-1)+1)}{k-1+2} c_{k-1} c_{n-(k-1)} = c_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (4k-2) c_{k-1} c_{n-(k-1)}. \end{aligned}$$

On pose $i = k - 1$,

$$T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + \sum_{i=0}^n (4i+2) c_i c_{n-i} = c_{n+1} + 4 \sum_{i=0}^n i c_i c_{n-i} + 2 \sum_{i=0}^n c_i c_{n-i}.$$

On a bien $T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n$.

(c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = c_{n+1}$.

On fait une preuve par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathcal{H}_n : S_n = c_{n+1}.$$

Pour $n = 0, S_0 = c_0 c_0 = 1 = c_1$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Supposons $\mathcal{H}_n$ pour un $n \in \mathbb{N}$, on a $T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n$. Or avec 7(a), on a aussi $T_k = \frac{k}{2} S_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc

$$\left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) S_{n+1} = c_{n+1} + (2n+2) S_n,$$

on utilise alors $\mathcal{H}_n$ et

$$\left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) S_{n+1} = c_{n+1} + (2n+2) S_n,$$

donc

$$\left(\frac{n+3}{2}\right) S_{n+1} = (2n+3)c_{n+1} \text{ donc } S_{n+1} = \frac{2(2(n+1)+1)}{n+3} c_{n+1} = c_{n+2},$$

avec la question 3, donc $\mathcal{H}_{n+1}$ vraie.

Finalement, Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_n$ est vraie.

On a donc montré : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$.

8. (a) Montrer que, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$, la série $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ converge.

Soit $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, on a $0 \leq c_n |x|^n \leq c_n \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{\sqrt{2}}{2(n^{3/2})}$ avec 6(b). Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge car $\frac{3}{2} > 1$, donc par comparaison des séries à terme général positif, la série $\sum c_n x^n$ converge absolument donc elle converge.

On pose, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et $g(x) = 2xf(x)$.

On admet que la fonction f est continue sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

(b) Soit x appartenant à $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

En remarquant que, pour tout N de $\mathbb{N}$, $\left(\sum_{i=0}^N c_i x^i\right) \left(\sum_{j=0}^N c_j x^j\right) = \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}\right) x^n$,

montrer : $(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}$.

La série $\sum c_n x^n$ converge absolument donc

$$f(x)^2 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k\right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} c_j x^j\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}\right) x^n.$$

La question 7 donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} = c_{n+1}$ donc

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} x^n = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j x^{j-1} \text{ avec } j = n+1.$$

Finalement $f(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}$.

(c) En déduire : $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$, $(g(x))^2 = 2g(x) - 4x$.

Soit $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$,

$$g(x)^2 = 4x^2 f(x)^2 = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n+1} = 4 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+1} - c_0 x \right) = 2 \underbrace{\left(2x \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \right)}_{=2xf(x)=g(x)} - 4x.$$

Finalement $g(x)^2 = 2g(x) - 4x$.

(d) Montrer qu'il existe une fonction ε définie sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$ et à valeurs dans $\{-1; 1\}$ telle que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], \quad g(x) = 1 + \varepsilon(x) \sqrt{1 - 4x}.$$

Montrer ensuite que la fonction ε est continue sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

La forme précédente suggère une identité remarquable. Soit $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, $g(x)^2 = 2g(x) - 4x$ donc $g(x)^2 - 2g(x) + 1 = 1 - 4x$. Donc $(g(x) - 1)^2 = 1 - 4x$ par conséquent $g(x) - 1 = \sqrt{1 - 4x}$ ou $g(x) - 1 = -\sqrt{1 - 4x}$ donc il existe bien $\varepsilon(x)$ valant -1 ou 1 tel que $g(x) - 1 = \varepsilon(x)\sqrt{1 - 4x}$.

Pour $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, on aura $1 - 4x > 0$ donc on peut diviser par $\sqrt{1 - 4x} \neq 0$, ainsi

$$\frac{g(x) - 1}{\sqrt{1 - 4x}} = \varepsilon(x).$$

On sait que f est continue sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, donc g l'est aussi. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - 4x}}$ est continue sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, comme inverse d'une racine carré d'un polynôme strictement positif. Donc par produit, ε est continue sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

(e) En déduire : $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, $g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}$.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est encore un intervalle donc, sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, ε vaut toujours 1 ou toujours -1 . Pour $x = 0$, $g(x) = 0$ donc

$$g(0) = 1 + \varepsilon(0) = 0 \text{ donc } \varepsilon(0) = -1.$$

Donc, sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, ε vaut -1 et $g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}$.

On sait que g et $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - 4x}$ sont continues en $\frac{1}{4}$ donc

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} (1 - \sqrt{1 - 4x}) = 1.$$

Donc $g\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - 0 = 1 - \sqrt{1 - 4 \times \frac{1}{4}}$.

Finalement, sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, $g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}$.

PARTIE B : Un peu d'intégration

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} & \text{si } x \in [-2; 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. (a) Montrer : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^2 dt = \frac{\pi}{2}$.

Pour tout a, b dans $\mathbb{R}$, on a $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ donc

$$\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1 \text{ donc } \cos(a)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2a) + 1).$$

La fonction $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc on peut intégrer $\cos^2$ sur le segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2 dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\cos(2t) + 1) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2t)}{2} + t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(0 - 0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- (b) En déduire, à l'aide du changement de variable $x = 2 \sin(t)$, la valeur de $\int_{-2}^2 \varphi(x) dx$.

La fonction $x \mapsto 4 - x^2$ est polynomiale et positive sur $[-2, 2]$ en effet si $-2 \leq x \leq 2$ alors $x^2 \leq 4$ et $0 \leq 4 - x^2$.

Donc par composition $x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$ est continue sur $[-2, 2]$. Donc on peut intégrer φ sur le segment $[-2, 2]$.

Le changement de variable $x = 2 \sin(t)$ est C^1 sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $dx = 2 \cos(t) dt$, $x = 2$ et $t = \frac{\pi}{2}$, $x = -2$ et $t = -\frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \varphi(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4 - (2 \sin(t))^2} (2 \cos(t)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \sqrt{1 - \sin(t)^2} \cos(t) dt. \end{aligned}$$

Sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos$ est positif donc $\sqrt{1 - \sin(t)^2} = \sqrt{\cos(t)^2} = \cos(t)$ donc

$$\int_{-2}^2 \varphi(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1.$$

10. (a) Justifier que, pour tout n $\int_{-2}^2 x^n \varphi(x) dx$ existe et que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-2}^2 x^{2n+1} \varphi(x) dx \quad \text{et} \quad \int_{-2}^2 x^{2n} \varphi(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4 - x^2} dx.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n : x \mapsto x^{2n+1} \varphi(x)$. Comme $x \mapsto x^{2n+1}$ est impaire sur $\mathbb{R}$, la fonction g_n , produit de fonctions paire et impaire, sera impaire sur $\mathbb{R}$. Or l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) dx$ converge

donc elle vaut 0. Donc $\int_{-2}^2 x^{2n+1} \varphi(x) dx = 0$.

La fonction $x \mapsto x^{2n}$ est paire sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^{2n} \varphi(x)$, produit de deux fonctions paires, sera paire sur $\mathbb{R}$. Or l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) dx$ converge donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} \varphi(x) dx = \int_{-2}^2 x^{2n} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} dx = 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$\text{Donc } \int_{-2}^2 x^{2n} \varphi(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4 - x^2} dx.$$

- (b) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \int_{-2}^2 x^{2n} \varphi(x) dx$.

i. Calculer u_0 .

$$u_0 = \int_{-2}^2 \varphi(x) dx = 1.$$

ii. A l'aide d'une intégration par parties, montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{3} (4u_n - u_{n+1})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale $u : x \mapsto x^{2n+1}$ est polynomiale donc C^1 sur $\mathbb{R}$ et on sait que $u' : x \mapsto (2n+1)x^{2n}$.

La fonction $v : x \mapsto (4 - x^2)^{3/2}$ est C^1 sur $[0, 2]$ et on a $v' : x \mapsto -2x \times \frac{3}{2}(4 - x^2)^{1/2}$. Cela permet de faire une intégration par parties

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n+2} \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^2 \underbrace{x^{2n+1}}_{=u(x)} \underbrace{\left(x \sqrt{4 - x^2}\right)}_{=-\frac{1}{3}v'(x)} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[x^{2n+1} \left(-\frac{1}{3}(4 - x^2)^{3/2} \right) \right]_0^2 + \frac{1}{3\pi} \int_0^2 (2n+1)x^{2n}(4 - x^2)^{3/2} dx. \end{aligned}$$

Le crochet vaut 0. Il reste l'intégrale.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2n+1}{3\pi} \int_0^2 x^{2n}(4 - x^2) \sqrt{4 - x^2} dx \\ &= \frac{2n+1}{3} \left(4 \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4 - x^2} dx - \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2(n+1)} \sqrt{4 - x^2} dx \right) = \frac{2n+1}{3} (4u_n - u_{n+1}). \end{aligned}$$

iii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = c_n$.

On fait une preuve par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{H}_n : u_n = c_n.$$

Pour $n = 0$, on a vu que $u_0 = 1 = c_0$.

Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, on sait que $u_{n+1} = \frac{2n+1}{3} (4u_n - u_{n+1})$.

Donc $(2n+4)u_{n+1} = 4(2n+1)u_n$ donc $u_{n+1} = 4 \frac{2n+1}{2n+4} u_n = 2 \frac{2n+1}{n+2} u_n = c_{n+1}$ avec la question 3.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ vraie.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = c_n$.

PARTIE C : Étude d'une expérience aléatoire

Soit p un réel appartenant à $]0; 1[$.

On considère une pièce qui amène Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $1 - p$ avec laquelle on effectue une succession de lancers indépendants.

On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On définit la variable aléatoire T égale au nombre de lancers effectués lorsque, pour la première fois, on obtient le même nombre de Pile que de Face, et égale à 0 si un tel événement ne se réalise pas.

Par exemple, si on obtient successivement $P - P - F - P - F - F - P - F - \dots$ alors la variable aléatoire T est égale à 6.

11. (a) Ecrire une fonction Python `simule(p)` qui prend en argument le réel p , qui simule au plus 10^4 lancers de la pièce et qui renvoie la valeur de T en convenant que si, sur les 10^4 lancers, le nombre de Pile obtenus n'a jamais été égal au nombre de Face, alors T prend la valeur 0.

```
import numpy.random as rd
def simule(p) :
    n=1
    nbFace=0
    nbPile=0
    if rd.binomial(1,p) == 1 :
        nbPile=1
    else :
        nbFace=1
    while n<=10000 :
        if nbPile==nbFace :
```

```

        return(n)
    n=n+1
    if rd.binomial(1,p) == 1 :
        nbPile=1+nbPile
    else :
        nbFace=1+nbFace
    return(0)

```

(b) On exécute le script Python suivant :

```

for i in range(1,4):
    L=np.zeros(3)
    m=0
    for k in range(1000):
        m=m+simule(i/4)
    L[j]=m/1000
display(L)

```

et on obtient les résultats suivants :

```

1.392    1.478    1.41
100.572   71.172   125.28
1.454    1.544    1.414

```

Qu'affiche le script ? Comment peut-on interpréter ces différents résultats ?

La boucle `for k=1:1000` va simuler 1000 fois la variable T et placer dans le tableau L la moyenne de ses 1000 valeurs. Le tableau L contient 3 approximations de $E(T)$ avec $p = \frac{i}{4}$.

Donc sur la première ligne de l'affichage, on a 3 approximation de $E(T)$ avec $p = \frac{1}{4}$.

Sur la deuxième ligne de l'affichage, on a 3 approximation de $E(T)$ avec $p = \frac{1}{2}$.

Sur la troisième ligne de l'affichage, on a 3 approximation de $E(T)$ avec $p = \frac{3}{4}$.

12. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, P(T = 2n + 1) = 0$.

Le nombre de piles plus le nombre de faces est égal au nombre total de lancer. Donc le nombre de piles est égal au nombre de faces uniquement sur des rangs de lancers pairs. S'il n'y a jamais cet évènement, T vaut 0 et reste pair.

Donc T ne peut pas être impair.

13. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, D_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :

- à l'issue du $(2n)$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
- le nombre de Pile est toujours strictement supérieur au nombre de Face tout au long des $(2n - 1)$ premiers lancers ;

et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $d_n = \text{Card}(D_n)$.

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, E_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :

- à l'issue du $(2n)$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
- le nombre de Pile est toujours supérieur ou égal au nombre de Face tout au long des $(2n - 1)$ premiers lancers ;

et on pose $e_0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $e_n = \text{Card}(E_n)$.

Par exemple, $D_3 = \{PPPPFF, PPFPFF\}$

et $E_3 = \{PFPPFF, PFPPFF, PPFFPF, PPFPFF, PPPFFF\}$

ainsi $d_3 = 2$ et $e_3 = 5$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

En remarquant que tout résultat de D_n commence nécessairement par un Pile et se termine par un Face, justifier : $d_n = e_{n-1}$.

Pour $n = 1$, $D_1 = \{P - F\}$ donc D_1 est de cardinal 1 et $d_1 = 1 = e_0$.

Soit $n \geq 2$, un élément de D_n est une liste de $2n$ termes. On pose $(a_1, a_2, \dots, a_{2n}) \in D_n$. On sait que $a_1 = P$, et $a_{2n} = F$. Ainsi la sous-liste $(a_2, \dots, a_{2n-1})$ contient autant de P que de F .

Par propriété de D_n la sous-liste $(a_2, \dots, a_{2n-1})$ est telle que le nombre de P est toujours supérieur ou égal au nombre de F au long des lancers car on a enlevé le premier P et le dernier F . Donc $(a_2, \dots, a_{2n-1})$ est dans E_{n-1} .

On a ainsi créé une injection de D_n vers E_{n-1} . Donc $d_n \leq e_{n-1}$.

Réciproquement soit $(b_1, \dots, b_{2n-2}) \in E_{n-1}$, la liste $(P, b_1, \dots, b_{2n-2}, F)$ contient autant de P que de F . Avec le premier P , le nombre de P est toujours supérieur ou égal au nombre de F au long des lancers. Donc $(P, b_1, \dots, b_{2n-2}, F) \in D_n$. On a ainsi créé une injection de E_{n-1} vers D_n . Donc $e_{n-1} \leq d_n$.

Finalement $e_{n-1} = d_n$.

- (b) i. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = \sum_{k=1}^n d_k e_{n-k}$.

Pour tout $w \in E_n$, on note $h(w)$ le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que sur les $2k$ premiers lancers de w , le nombre de P est égal au nombre de F . Ce k existe car l'ensemble des $j \in \mathbb{N}^*$ tels que le nombre de P est égal au nombre de F lors des $2j$ premiers lancers de w est inclus dans $\mathbb{N}^*$ et cet ensemble est non vide car il contient n . Donc cet ensemble contient un plus petit élément dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et soit $w \in E_n$, tel que $h(w) = k$, on pose $w = (a_1, \dots, a_{2n})$, par définition $(a_1, \dots, a_{2k}) \in D_k$, $(a_{2k+1}, \dots, a_{2n}) \in E_{n-k}$, afin que $(a_1, \dots, a_{2n}) \in E_n$.

Réciproquement si $(a_1, \dots, a_{2k}) \in D_k$, $(a_{2k+1}, \dots, a_{2n}) \in E_{n-k}$, alors $(a_1, \dots, a_{2n}) \in E_n$ et $h((a_1, \dots, a_{2n})) = k$.

Ainsi l'ensemble des antécédents de h par k est en bijection avec $D_k \times E_{n-k}$ donc son cardinal est $\text{card}(D_k) \times (E_{n-k}) = d_k e_{n-k}$.

On note A_k l'ensemble des antécédents de k par h . Comme h est à image dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Les A_k sont deux à deux disjoints par définition de la fonction h . Donc

$$\text{card}(E_n) = \sum_{k=1}^n \text{card}(A_k) = \sum_{k=1}^n d_k e_{n-k}.$$

- ii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, e_{n+1} = \sum_{k=0}^n e_k e_{n-k}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \in \mathbb{N}^*$ donc avec $j = k-1$,

$$e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} d_k e_{n+1-k} = \sum_{j=0}^n d_{j+1} e_{n-j}$$

or $j+1 \in \mathbb{N}^*$ donc $d_{j+1} = e_j$ donc finalement

$$e_{n+1} = \sum_{j=0}^n e_j e_{n-j}.$$

- iii. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = c_n$ où c_n est le nombre de Catalan d'ordre n .

On fait une preuve par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{H}_n : e_n = c_n.$$

Pour $n = 0$, on a vu que $e_0 = 1 = c_0$.

Supposons $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ vraies pour un rang $n \in \mathbb{N}$,

$$e_{n+1} = \sum_{j=0}^n e_j e_{n-j} = \sum_{j=0}^n c_j c_{n-j}.$$

En effet pour tout $n \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $e_j = c_j$ et $n-j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ donc $e_{n-j} = c_{n-j}$.

On conclut avec la question 7 : $e_{n+1} = \sum_{j=0}^n c_j c_{n-j} = c_{n+1}$.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = c_n$.

- (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(T = 2n) = 2c_{n-1}p^n(1-p)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A : “le premier lancer donne pile” et donc $\bar{A}$: “le premier lancer donne face.” Bien entendu $\{A, \bar{A}\}$ est un système complet d'évènements donc

$$P(T = n) = P([T = n] \cap A) + P([T = n] \cap \bar{A}).$$

Un évènement de $[T = n] \cap A$ est tel que le premier lancer est pile et le premier lancer donnant l'égalité du nombre de P et F est $2n$, on reconnaît la définition de D_n donc $\text{card}([T = n] \cap A) = d_n$.

Un évènement de $[T = n] \cap \bar{A}$ est tel que le premier lancer est face et le premier lancer donnant l'égalité du nombre de P et F est $2n$, on reconnaît la définition de D_n à condition d'échanger les rôles de P et F , cela ne change pas le cardinal. Donc $\text{card}([T = n] \cap \bar{A}) = d_n$.

Les évènements élémentaires (donc incompatibles) de $[T = n] \cap \bar{A}$ sont tous de probabilité $p^n(1-p)^n$ car les lancers sont indépendants et il y a n fois F et n fois pile. Donc

$$P([T = n] \cap A) = d_n p^n (1-p)^n.$$

De même $P([T = n] \cap \bar{A}) = d_n p^n (1-p)^n$. Donc

$$P(T = n) = 2d_n p^n (1-p)^n = 2e_{n-1} p^n (1-p)^n = 2c_{n-1} p^n (1-p)^n.$$

On utilisé $n-1 \in \mathbb{N}$ ainsi que les questions 14(a) et 14(b).

14. (a) Montrer que, pour tout x de $[-1; 1]$, la série $\sum_{n \geq 0} P(T = n)x^n$ converge.

Soit $x \in [-1, 1]$, donc $|x| \leq 1$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a, avec 6(a),

$$|P(T = n)x^n| = |2c_{n-1}p^n(1-p)^n x^n| \leq \sqrt{2} \frac{(4p(1-p))^n}{n\sqrt{n}}.$$

Un étude (faite juste après) rapide du tableau de variations de $u : x \mapsto x(1-x)$ dit que, sur $[0, 1]$, on a $u(x) \leq \frac{1}{4}$ donc ici on a $4p(1-p) \leq 1$ donc

$$|P(T = n)x^n| = |2c_{n-1}p^n(1-p)^n x^n| \leq \sqrt{2} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Or $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge car $\frac{3}{2} > 1$ donc par comparaison des séries à termes généraux positif, la série $\sum P(T = n)x^n$ converge.

On pose, pour tout x de $[-1; 1]$: $G_T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n)x^n$.

- (b) Montrer : $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et $\left(p(1-p) = \frac{1}{4} \iff p = \frac{1}{2}\right)$.

On va montrer le résultat utilisé au-dessus. La fonction $u : x \mapsto x(1-x)$ est polynomiale donc dérivable et $u'(x) = 1 - 2x$ donc $u' > 0$ sur $[0, \frac{1}{2}[$ et $u' < 0$ sur $] \frac{1}{2}, 0]$ donc u admet son maximum en $\frac{1}{2}$. Par la stricte monotonie sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, 0]$, ce maximum $u(1/2) = 1/4$ est atteint une seule fois et c'est en $\frac{1}{2}$.

- (c) Montrer : $\forall x \in [-1; 1], \quad G_T(x) = P(T=0) + g(p(1-p)x^2)$, où g est la fonction définie dans la question A.8.

Soit $x \in [-1, 1]$,

$$G_T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T=k)x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=2n)x^{2n}$$

car $P(T=2n+1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} G_T(x) &= P(T=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(T=2n)x^{2n} \\ &= P(T=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2c_{n-1}p^n(1-p)^n x^{2n} = P(T=0) + \sum_{k=0}^{+\infty} 2c_k p^{k+1}(1-p)^{k+1} x^{2k+2} \\ &= P(T=0) + 2p(1-p)x^2 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k p^k (1-p)^k x^{2k}. \end{aligned}$$

On a $|p(1-p)x^2| \leq \frac{1}{4}$ donc on peut utiliser la fonction f et la fonction g avec

$$G_T(x) = P(T=0) + 2p(1-p)x^2 f(p(1-p)x^2) = P(T=0) + g(p(1-p)x^2).$$

- (d) En utilisant la valeur de $G_T(1)$, montrer : $P(T=0) = |2p-1|$.

Interpréter ce résultat lorsque $p = \frac{1}{2}$.

Le support de T est $2\mathbb{N} = \{2n \text{ tel que } n \in \mathbb{N}\}$ donc

$$G_T(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=2n) = 1$$

car $\{[T=2n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements.

Or $G_T(1) = P(T=0) + g(p(1-p))$ donc $P(T=0) = 1 - g(p(1-p))$. On peut utiliser 8(e) avec $(p(1-p) \in [0, \frac{1}{4}])$, ainsi

$$P(T=0) = 1 - \left(1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}\right) = \sqrt{1 - 4p + 4p^2} = \sqrt{(1-2p)^2} = |1-2p|.$$

Pour $p = \frac{1}{2}$, $P(T=0) = 0$ donc il est presque-impossible de ne jamais avoir égalité du nombre de piles et de faces lors d'une série infinie de lancers avec une pièce équilibrée.

15. En utilisant le résultat de la question A.6.b, montrer :

- (a) si $p \neq \frac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T admet une espérance.

La variable T est discrète de support $T(\Omega) = 2\mathbb{N}$ donc elle a une espérance si et seulement si la série $\sum 2nP(T=2n)$ converge absolument. Elle est à terme général positif donc on étudie sa convergence. Avec 6(b), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2nP(T=2n) = 4nc_{n-1}p^n(1-p)^n$ et

$$0 \leq 2nP(T=2n) \leq 4np^n(1-p)^n \times \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^{n-1}}{(n-1)\sqrt{n-1}}$$

Si $p \neq \frac{1}{2}$ alors $p(1-p) < \frac{1}{4}$ donc $4p(1-p) < 1$ donc

$$4np^n(1-p)^n \times \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^{n-1}}{(n-1)\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n(4p(1-p))^n}{(n-1)\sqrt{n-1}} \sim \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n}}.$$

Or par croissances comparées avec $0 \leq 4p(1-p) < 1$, on a

$$n^2 \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n}} = n^{3/2} (4p(1-p))^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n}} = o(1/n^2).$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge avec un terme général positif donc par comparaison la série $\sum 2nP(T=2n)$ converge. Donc T a une espérance.

(b) si $p = \frac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.

Si $p = \frac{1}{2}$, alors $2nP(T=2n) = 4nc_{n-1}(\frac{1}{4})^n$ donc 6(e)

$$\frac{1}{4} \times 4n \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{4^{n-1}}{(n-1)\sqrt{n-1}} \leq 2nP(T=2n) = 4n \left(\frac{1}{4}\right)^n c_{n-1}.$$

Donc

$$0 \leq \frac{1}{4} \times \frac{n}{(n-1)\sqrt{n-1}} \leq 2nP(T=2n) = 4n \left(\frac{1}{4}\right)^n c_{n-1}.$$

Or $\frac{n}{(n-1)\sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$ or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ converge car $\frac{1}{2} < 1$ donc par comparaison des séries à termes généraux positifs, la série $\sum 2nP(T=2n)$ diverge et T