
Concours blanc 2 du 09/06/26
Durée 4h, l'énoncé comporte **5 pages**

Exercice 1.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

On pose enfin $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $\frac{-1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.
2. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier $n \geq 2$, elle calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

```
1 def suite(n):  
2     v=0  
3     w=1  
4     for k in range(2,n+1):  
5         .....  
6         .....  
7         .....  
8     return .....
```

3. (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
(b) Justifier qu'il existe des réels λ et μ , que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \varphi^n + \mu \left(\frac{-1}{\varphi} \right)^n$$

- (c) En déduire que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite
4. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$$

- (a) Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\frac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.
- (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge.
- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$$

- (d) Montrer que : $\varphi = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

Exercice 2.

On note $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid MK = KM = M\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de $M_3(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que $M \in E$ si et seulement si $k = g = c = a, h = b$ et $f = d$.
 - (b) Déterminer une base de E ainsi que sa dimension.
 - (c) Les matrice de E sont-elles inversibles ?

On considère F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$ où a, b et c sont trois réels.

On appelle U la matrice de F avec $a = 3, b = 2$ et $c = 4$.

3. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.
4. On note φ l'application

$$\varphi : \begin{cases} F \\ A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} \end{cases} \begin{array}{l} \rightarrow \mathbb{R} \\ \mapsto \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{i,j} \\ = a_{1,1} - a_{1,2} + a_{1,3} - a_{2,1} + a_{2,2} - a_{2,3} + a_{3,1} - a_{3,2} + a_{3,3} \end{array}$$

- (a) Calculer $\varphi(U)$.
- (b) Montrer que l'application φ est linéaire.
- (c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$ une matrice de F . Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de a, b et c et en déduire une base de $\text{Ker}(\varphi)$
- (d) Montrer que φ est surjective.

Exercice 3.

On définit sur l'intervalle $]0; 1]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x \ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = e^{x \ln(x)}$.

1. (a) Les fonctions f et g admettent-elles des limites en 0 ?
 (b) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0; 1]$.
 (c) Justifier que l'intégrale $\int_0^1 g(t) dt$ est convergente. On notera I sa valeur.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (t \ln(t))^n dt$$

et :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.
- (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- (c) Calculer u_0 et u_1 .
- (d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

- (e) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
- (f) Écrire une fonction Python `somme` qui prend en paramètre d'entrée un entier naturel n et qui produit en paramètre de sortie la valeur de S_n .
3. (a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle, montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et tout entier naturel n :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

- (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |I - S_n| \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

- (c) Montrer que :

$$I = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

- (d) Écrire une fonction Python nommée `estimation` qui prend comme paramètre d'entrée un réel strictement positif `eps` et qui produit en paramètre de sortie une valeur approchée de I à `eps` près.

Exercice 4.

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : deux boules sont bleues, deux boules sont rouges, deux boules sont jaunes. On effectue une succession de tirages de deux boules successivement et sans remise dans cette urne selon le protocole suivant :

- si les deux boules sont de la même couleur, elles sont définitivement sorties de l'urne,
- si les deux boules sont de couleurs différentes, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) nécessaires pour obtenir une première paire de boules de la même couleur.

On note Y_2 (respectivement Y_3) le nombre de tirages (de deux boules) nécessaires pour obtenir une deuxième (respectivement une troisième) paire de boules de la même couleur, à partir de l'obtention de la première (respectivement de la deuxième) paire de boules de la même couleur.

On remarquera que Y_3 est une variable aléatoire constante et que $Y_3 = 1$.

On admettra que les variables Y_1, Y_2, Y_3 sont indépendantes.

Enfin, on note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider complètement l'urne.

Par exemple, si les résultats successifs sont $(R_1, B_1), (B_1, J_2), (J_1, J_2), (B_1, R_2), (R_1, B_2), (R_1, R_2), (B_1, B_2)$ alors Y_1 prend la valeur 3, Y_2 prend la valeur 3, Y_3 prend la valeur 1 et X prend la valeur 7.

1. Loi de Y_1

- (a) Calculer la probabilité d'obtenir une paire de boules de la même couleur lors du premier tirage (de deux boules).
- (b) Justifier que la variable aléatoire Y_1 suit une loi usuelle. De quel(s) paramètre(s) ?
Vérifier que $E(Y_1) = 5$. Que vaut la variance de Y_1 ?

2. Loi de Y_2

Dans cette question, on suppose que la première paire de boules de la même couleur a été obtenue et retirée de l'urne. Il reste ainsi quatre boules dans l'urne, deux pour chaque couleur restante.

- (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une paire de boules de la même couleur en un seul tirage (de deux boules) ?
- (b) Déterminer la loi de Y_2 . Quelle est son espérance ?
Vérifier que $V(Y_2) = 6$.

3. *Loi de X*

- (a) Quelle relation lie la variable aléatoire X aux variables aléatoires Y_1, Y_2, Y_3 ?
- (b) En déduire que $E(X) = 9$. Que vaut $V(X)$?
- (c) Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Justifier chaque égalité ci-dessous :

$$P(X = k) = P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \sum_{i=1}^{k-2} P(Y_1 = i)P(Y_2 = k - 1 - i)$$

Indication : On remarquera que :

$$[Y_1 + Y_2 = k - 1] = \bigcup_{i=1}^{k-2} ([Y_1 = i] \cap [Y_2 = k - 1 - i])$$

- (d) En déduire que :

$$\forall k \geq 3, \quad P(X = k) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4}{5} \right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3} \right)^{k-2} \right]$$

4. *Informatique*

- (a) Compléter ce script **Python** afin qu'il calcule et affiche les probabilités $P(X = k)$ pour $k \in \llbracket 3, 22 \rrbracket$.

```

1 u=np.zeros(23)
2 for k in range(3,23):
3     u[k] = .....
4 plt.plot(u, '+')
```

Le graphique obtenu en sortie est présent sur la figure 1 (page suivante).

Quelle semble être la valeur la plus probable de X ?

- (b) La figure 2 affiche les vingt valeurs de la fonction de répartition de X aux points d'abscisses entières comprises entre 3 et 22.
Déterminer graphiquement un réel m tel que $P(X \leq m) = P(X \geq m)$.

Figure 1

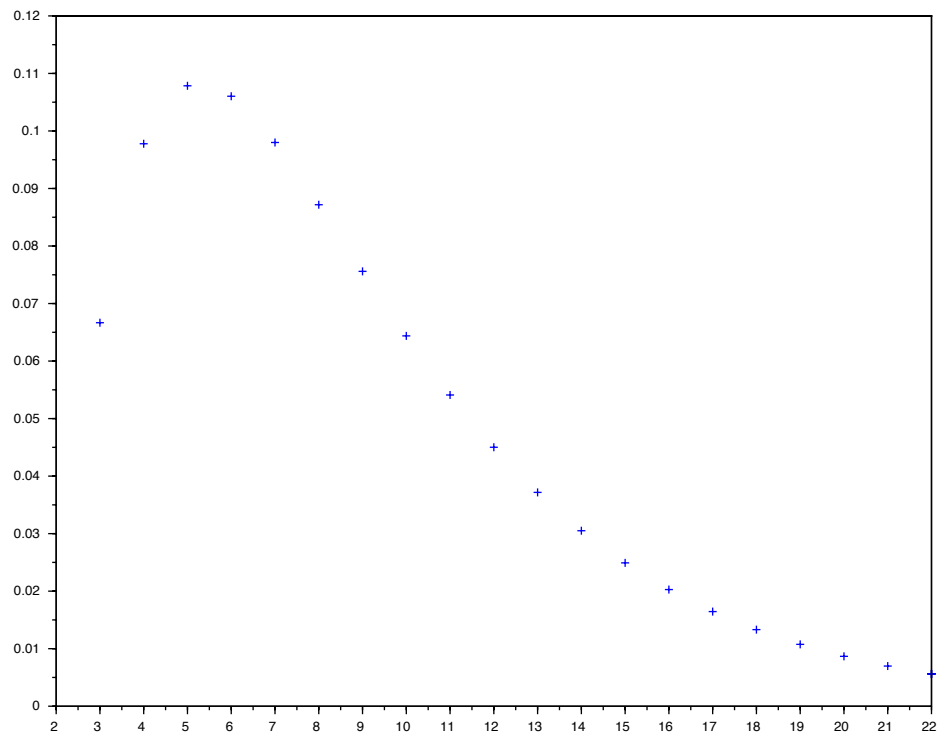
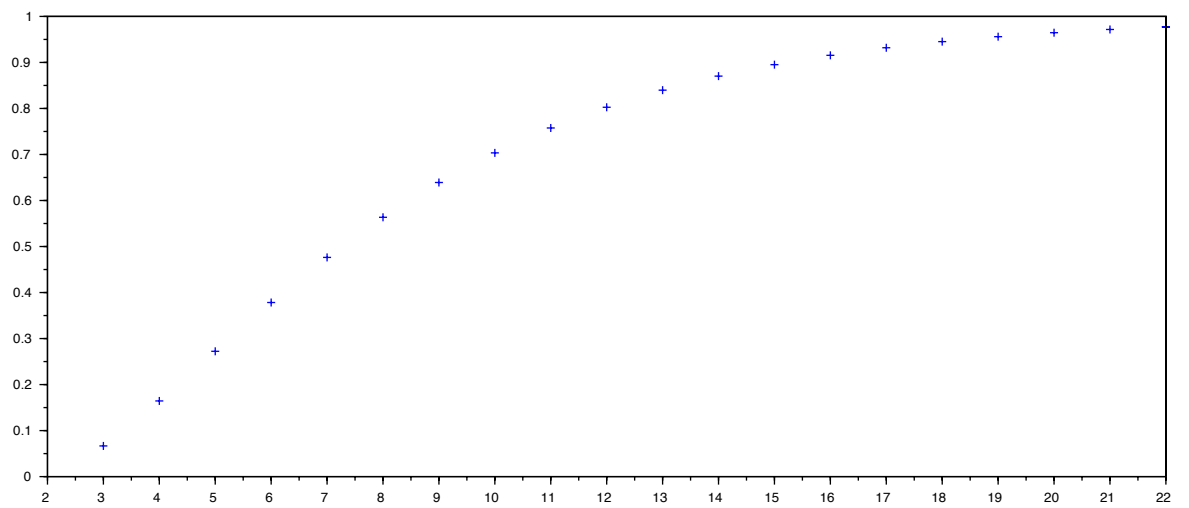


Figure 2



Concours blanc 2 du 09/06/26
Durée 4h, l'énoncé comporte **5 pages**

Exercice 1

Dans tout l'exercice α est un nombre réel.

1. Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente.

Dans la suite de l'exercice, pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose : $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$.

2. Expliciter les fonctions f_0 et f_{-1} .

Dans la suite de l'exercice, on suppose que α appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

3. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est-elle convergente ?

4. En utilisant le fait que $x^t = e^{t \ln(x)}$, justifier que, pour tout $x \in]0, 1[$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt$ est convergente.

Dans la suite de l'exercice, pour tout $x \in]0, 1[$, on pose :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha} dt.$$

5. Soit la fonction Γ d'Euler, définie par :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

On admet que cette fonction est définie correctement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in]0, 1[$. Démontrer que :

$$I(x) = (-\ln(x))^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha).$$

6. Soit $x \in]0, 1[$. On considère la fonction $u_{x,\alpha}$ définie pour $t > 0$ par : $u_{x,\alpha}(t) = \frac{x^t}{t^\alpha}$.

- (a) Démontrer que la fonction $u_{x,\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que :

$$u_{x,\alpha}(k+1) \leq \int_k^{k+1} u_{x,\alpha}(t) dt \leq u_{x,\alpha}(k)$$

et en déduire l'encadrement : $f_\alpha(x) - x \leq \int_1^{+\infty} u_{x,\alpha}(t) dt \leq f_\alpha(x)$.

- (c) Démontrer l'encadrement : $I(x) - \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha} dt \leq f_\alpha(x) \leq I(x)$

- (d) Déterminer un équivalent de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 1, à l'aide de la fonction Γ .

Exercice 2

- Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - Id)^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
 - Déterminer $(f - Id)^2 + f \circ (2Id - f)$.
 - En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, x = (f - Id)^2(x) + (f \circ (2Id - f))(x)$.
 - Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.
- Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$f \circ (f - Id) \circ (f - 4Id) = 0$$

- Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant :

$$\frac{1}{4}(X - 1)(X - 4) + XP(X) = 1$$

- En déduire que : $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$
- Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f , dont le degré est égal à p (avec $p \geq 2$), et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
 - Montrer qu'il existe p réels $a_1, \dots, a_p \neq 0$ avec $a_1 \neq 0$ tels que $P = a_1X + \dots + a_pX^p$.
 - En déduire que $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.
 - En quoi cette question est une généralisation des deux questions précédentes ?

Problème.

Ce problème est constitué de trois parties.

Les parties B et C sont indépendantes l'une de l'autre mais utilisent certains résultats de la partie A.

On rappelle que, pour tout (k, n) de $\mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note c_n le réel, appelé le nombre de Catalan d'ordre n , défini par :

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

PARTIE A : Quelques propriétés sur les nombres de Catalan 1.

- Calculer les réels c_0, c_1 et c_2 .
- Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.
 - En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, c_n est un entier naturel non nul.
- Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n$.
- Ecrire une fonction Python `catalan` prenant en entrée un entier n de $\mathbb{N}$ et renvoyant la valeur de c_n .
- Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 4 \left(\frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 4 \left(\frac{k+1}{k+2} \right)^{3/2}$.
 - En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{4} \frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$.

7. On note, pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k}$.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \frac{n}{2} S_n$

(on pourra effectuer le changement d'indice $i = n - k$ dans la somme définissant T_n).

(b) Montrer à l'aide de l'égalité de la question 3. : $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n$.

(c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = c_{n+1}$.

On a donc montré : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$.

8. (a) Montrer que, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$, la série $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ converge.

On pose, pour tout x de $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et $g(x) = 2xf(x)$.

On admet que la fonction f est continue sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

(b) Soit x appartenant à $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

En remarquant que, pour tout N de $\mathbb{N}$, $\left(\sum_{i=0}^N c_i x^i\right) \left(\sum_{j=0}^N c_j x^j\right) = \sum_{n=0}^{2N} \left(\sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}\right) x^n$,

montrer : $(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^{n-1}$.

(c) En déduire : $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], (g(x))^2 = 2g(x) - 4x$.

(d) Montrer qu'il existe une fonction ε définie sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$ et à valeurs dans $\{-1; 1\}$ telle que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], g(x) = 1 + \varepsilon(x) \sqrt{1 - 4x}.$$

Montrer ensuite que la fonction ε est continue sur $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

(e) En déduire : $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right], g(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}$.

PARTIE B : Un peu d'intégration

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} & \text{si } x \in [-2; 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. (a) Montrer : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^2 dt = \frac{\pi}{2}$.

(b) En déduire, à l'aide du changement de variable $x = 2 \sin(t)$, la valeur de $\int_{-2}^2 \varphi(x) dx$.

10. (a) Justifier que, pour tout n $\int_{-2}^2 x^n \varphi(x) dx$ existe et que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{-2}^2 x^{2n+1} \varphi(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-2}^2 x^{2n} \varphi(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^2 x^{2n} \sqrt{4 - x^2} dx.$$

- (b) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \int_{-2}^2 x^{2n} \varphi(x) dx$.
- Calculer u_0 .
 - A l'aide d'une intégration par parties, montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{3} (4u_n - u_{n+1})$.
 - En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = c_n$.

PARTIE C : Étude d'une expérience aléatoire

Soit p un réel appartenant à $]0; 1[$.

On considère une pièce qui amène Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité $1 - p$ avec laquelle on effectue une succession de lancers indépendants.

On modélise cette expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On définit la variable aléatoire T égale au nombre de lancers effectués lorsque, pour la première fois, on obtient le même nombre de Pile que de Face, et égale à 0 si un tel événement ne se réalise pas.

Par exemple, si on obtient successivement $P - P - F - P - F - F - P - F - \dots$ alors la variable aléatoire T est égale à 6.

- (a) Ecrire une fonction Python `simule(p)` qui prend en argument le réel p , qui simule au plus 10^4 lancers de la pièce et qui renvoie la valeur de T en convenant que si, sur les 10^4 lancers, le nombre de Pile obtenus n'a jamais été égal au nombre de Face, alors T prend la valeur 0.

- On exécute le script Python suivant :

```
for i in range(1,4):
    L=np.zeros(3)
    m=0
    for k in range(1000):
        m=m+simule(i/4)
    L[j]=m/1000
display(L)
```

et on obtient les résultats suivants :

1.392	1.478	1.41
100.572	71.172	125.28
1.454	1.544	1.414

Qu'affiche le script ? Comment peut-on interpréter ces différents résultats ?

- Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}, P(T = 2n + 1) = 0$.
- On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, D_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :
 - à l'issue du $(2n)$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
 - le nombre de Pile est toujours strictement supérieur au nombre de Face tout au long des $(2n - 1)$ premiers lancers ;
 et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $d_n = \text{Card}(D_n)$.
 On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, E_n l'ensemble des résultats possibles de $(2n)$ lancers de la pièce pour lesquels :
 - à l'issue du $(2n)$ -ième lancer, le nombre de Pile est égal au nombre de Face ;
 - le nombre de Pile est toujours supérieur ou égal au nombre de Face tout au long des $(2n - 1)$ premiers lancers ;
 et on pose $e_0 = 1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $e_n = \text{Card}(E_n)$.
 Par exemple, $D_3 = \{PPPPFF, PFPFFF\}$
 et $E_3 = \{PFPFPF, PFPFFF, PFPFPF, PFPFPF, PFPFFF\}$
 ainsi $d_3 = 3$ et $e_3 = 5$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

En remarquant que tout résultat de D_n commence nécessairement par un Pile et se termine par un Face, justifier : $d_n = e_{n-1}$.

(b) i. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = \sum_{k=1}^n d_k e_{n-k}$.

ii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, e_{n+1} = \sum_{k=0}^n e_k e_{n-k}$.

iii. Montrer alors : $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = c_n$ où c_n est le nombre de Catalan d'ordre n .

(c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(T = 2n) = 2c_{n-1}p^n(1-p)^n$.

14. (a) Montrer que, pour tout x de $[-1; 1]$, la série $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(T = n)x^n$ converge.

On pose, pour tout x de $[-1; 1]$: $G_T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n)x^n$.

(b) Montrer : $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et $\left(p(1-p) = \frac{1}{4} \iff p = \frac{1}{2}\right)$.

(c) Montrer : $\forall x \in [-1; 1], G_T(x) = \mathbf{P}(T = 0) + g(p(1-p)x^2)$, où g est la fonction définie dans la question A.8.

(d) En utilisant la valeur de $G_T(1)$, montrer : $\mathbf{P}(T = 0) = |2p - 1|$.
Interpréter ce résultat lorsque $p = \frac{1}{2}$.

15. En utilisant le résultat de la question A.6.b, montrer :

(a) si $p \neq \frac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T admet une espérance.

(b) si $p = \frac{1}{2}$, alors la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.