
Devoir maison 1 pour le 19/09/2025

Exercice 1.

Considérons la suite u définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$$

1. Montrer par récurrence que u_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n$: " u_n est bien défini et positif".

Initialisation : u_0 est bien défini et $u_0 = 0 \geq 0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$, supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors comme $u_n \geq 0$, on a $u_n + 4 \geq 4 > 0$ donc $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$ est bien définie. De plus, comme u_n positif, on a $2u_n + 3$ et $u_n + 4$ positif, donc u_{n+1} est positif. Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire, par récurrence, on a $\mathcal{P}_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et positif.

2. (a) Déterminer les deux solutions α et β de l'équation $x = \frac{2x+3}{x+4}$. On impose $\alpha > \beta$.

On cherche à résoudre l'équation $x = \frac{2x+3}{x+4}$. On suppose $x \neq -4$. On a :

$$\begin{aligned} x = \frac{2x+3}{x+4} &\Leftrightarrow x \times (x+4) = 2x+3 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x = 2x+3 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \end{aligned}$$

On cherche donc les racines du polynôme $x^2 + 2x - 3$.

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$. Il y a donc 2 racines différentes :

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

Ainsi : $\alpha = 1$ et $\beta = -3$ pour respecter $\alpha > \beta$.

- (b) Vérifier que la suite (v_n) de terme général $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est géométrique.

Par ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$,

$u_n + 3 > 0$, donc v_n est bien défini. De plus soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} \\ &= \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4} - 1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4} + 3} \\ &= \frac{\frac{2u_n+3-u_n-4}{u_n+4}}{\frac{2u_n+3+3u_n+12}{u_n+4}} \\ &= \frac{u_n - 1}{u_n + 4} \frac{5n + 15}{u_n + 4} \\ &= \frac{u_n - 1}{5(u_n + 3)} \\ &= \frac{1}{5} \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \\ &= \frac{1}{5} v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+3} = \frac{-1}{3}$

3. En déduire une expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \frac{-1}{3}$ et de raison $\frac{1}{5}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{-1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n$. On a donc :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{-1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n (u_n + 3) = u_n - 1 \\ &\Leftrightarrow u_n \left(\frac{-1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) - 3 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n = u_n - 1 \\ &\Leftrightarrow u_n \left(\frac{-1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n - 1\right) = -1 + 3 \frac{+1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n \\ &\Leftrightarrow u_n \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1\right) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5^n}} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5^n}}.$$

Exercice 2.

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définir pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n - 2n^3 \end{cases}$. On cherche à déterminer une expression explicite simplifiée du terme général u_n de cette suite.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n

$$u_{n+1} = u_n - 2n^3 \text{ donc } u_{n+1} - u_n = -2n^3.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k$ de deux manières différentes.

D'une part, par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_{n-1+1} - u_0 = u_n - u_0$$

D'autre part :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = \sum_{k=0}^{n-1} -2k^3 = -2 \times \frac{(n-1)^2(n-1+1)^2}{4} = \frac{-2(n-1)^2n^2}{4}$$

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

En combinant les deux expressions on obtient :

$$u_n - u_0 = \frac{-2(n-1)^2n^2}{4}$$

Donc

$$u_n = \frac{-2(n-1)^2n^2}{4} + u_0 = \frac{-2(n-1)^2n^2}{4} + 1$$