
Devoir maison 2 pour le 26/09/2025

Exercice 1.

Examiner les relations logiques existant entre les assertions suivantes :

- A : Tous les hommes sont mortels
- B : Tous les hommes sont immortels
- C : Aucun homme n'est mortel
- D : Aucun homme n'est immortel
- E : Il existe des hommes immortels
- F : Il existe des hommes mortels

Les relations sont les suivantes :

- $A \Leftrightarrow D$
- $B \Leftrightarrow C$
- $\overline{A} \Leftrightarrow E$
- $\overline{B} \Leftrightarrow F$
- $A \Rightarrow F$
- $B \Rightarrow E$

Exercice 2.

Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$: Si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Écrire la contraposée de la proposition précédente.

La contraposée est "Si n est impair alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

2. Montrer que tout entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$. Commençons par montrer que si n impair alors n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $r \in \{1, 3\}$.

En effet soit n un entier, alors par division euclidienne, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ tel que $n = 4k + r$. De plus si $r = 0$ ou 2 alors n sera pair. Ainsi si n impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ tel que $n = 4k + r$.

3. En déduire une preuve de la contraposée.

Soit alors n impair, il existe donc $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ tq $n = 4k + r$ alors, si $r = 1$, on a

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (4k + 1)^2 - 1 \\ &= 16k^2 + 8k + 1 - 1 \\ &= 16k^2 + 8k \\ &= 8(2k^2 + k) \end{aligned}$$

Donc $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Si $n = 4k + 3$, alors :

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (4k + 3)^2 - 1 \\ &= 16k^2 + 24k + 9 - 1 \\ &= 16k^2 + 24k + 8 \\ &= 8(2k^2 + 3k + 1) \end{aligned}$$

Donc $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Ainsi dans tous les cas si n impair alors $n^2 - 1$ est divisible par 8

4. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

Alors par contraposée, si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 alors n est pair.