

Devoir maison 3 pour le 14/10/2025

Exercice 1.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit P_n comme :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = 2 - X \\ \forall n \geq 0, P_{n+2} = 2(2n+3)P_{n+1} + X^2 P_n \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

On démontre par récurrence double la propriété $\mathcal{P}(n)$: " $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ ".

Initialisation : $P_0 = 1 \in \mathbb{Z}[X]$ et $P_1 = 2 - X \in \mathbb{Z}[X]$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

On a $P_{n+2} = \underbrace{2(2n+3)}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{P_{n+1}}_{\in \mathbb{Z}[X]} + \underbrace{X^2}_{\in \mathbb{Z}[X]} \underbrace{P_n}_{\in \mathbb{Z}[X]}$ donc $P_{n+2} \in \mathbb{Z}[X]$ comme produit d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \in \mathbb{Z}[X]$.

2. Calculer P_2 et P_3 .

On a $P_2 = 2(2 \times 0 + 3)P_1 + X^2 P_0 = X^2 - 6X + 12$.

On a $P_3 = 2(2 \times 1 + 3)P_2 + X^2 P_1 = -X^3 + 12X^2 - 60X + 120$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n . (On pourra émettre une hypothèse en accord avec la question 2 et la démontrer par récurrence.)

En regardant les premiers termes, on fait l'hypothèse suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété " P_n est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$ " et démontrons par récurrence double qu'elle est vraie pour tout n .

Initialisation : $P_0 = 1$ est de degré 0 et de coefficient dominant $1 = 1^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$P_1 = 2 - X$ est de degré 1 et de coefficient dominant $-1 = (-1)^1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

On a

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= 2(2n+3)P_{n+1} + X^2 P_n \\ &= 2(2n+3)((-1)^{n+1}X^{n+1} + \dots) + X^2((-1)^n X^n + \dots) \\ &= (-1)^n X^{n+2} + \text{termes de degré strictement inférieur} \end{aligned}$$

donc P_{n+2} est de degré $n+2$ et son coefficient dominant vaut $(-1)^n = (-1)^{n+2}$ donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $P_n(0) = \frac{(2n)!}{n!}$.

On montre ce résultat par récurrence double. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $P_n(0) = \frac{(2n)!}{n!}$ ".

Initialisation : On a $\frac{(2 \times 0)!}{0!} = \frac{1}{1} = 1 = P_0(0)$ et $\frac{(2 \times 1)!}{1!} = \frac{2}{1} = 2 = P_1(0)$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n \geq 0$ supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies. Alors

$$\begin{aligned} P_{n+2}(0) &= 2(2n+3)P_{n+1}(0) + 0 \times P_n(0) \\ &= 2(2n+3) \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} \text{ par hypothèse de récurrence} &= 2(n+2) \frac{(2n+3)!}{(n+2)!} \\ &= (2n+4) \frac{(2n+3)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{(2n+4)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{(2(n+2))!}{(n+2)!} \end{aligned}$$