
Devoir maison 3 pour le 14/10/2025

Exercice 1.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit P_n comme :

$$\begin{cases} P_0 &= 1 \\ P_1 &= 2 - X \\ \forall n \geq 0, P_{n+2} &= 2(2n+3)P_{n+1} + X^2P_n \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
2. Calculer P_2 et P_3 .
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n . (On pourra émettre une hypothèse en accord avec la question 2 et la démontrer par récurrence.)
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $P_n(0) = \frac{(2n)!}{n!}$.

Devoir maison 3 pour le 14/10/2025

Exercice 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit P_n comme :

$$\begin{cases} P_0 &= 1 \\ P_1 &= 2 - X \\ \forall n \geq 0, P_{n+2} &= 2(2n+3)P_{n+1} + X^2P_n \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
2. Calculer P_2 et P_3 .
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n . (On pourra émettre une hypothèse en accord avec la question 2 et la démontrer par récurrence.)
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $P_n(0) = \frac{(2n)!}{n!}$.