

Devoir maison 4 pour le 4/11/2025

Exercice 1.

Résoudre le système suivant en discutant suivant les valeurs de a :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \\ x + y + az = a^2 \end{cases} & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + z = a \\ (1 - a^2)y + (1 - a)z = 1 - a^2 \\ (1 - a)y + (a - 1)z = a^2 - a \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - aL_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + z = a \\ (1 - a)y + (a - 1)z = a^2 - a \\ (1 - a^2)y + (1 - a)z = 1 - a^2 \end{cases} & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + z = a \\ (1 - a)y + (a - 1)z = a^2 - a \\ (a - 1)(1 + 1 + a)z = 1 - a^2 - (1 + a)(a^2 - a) \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - (1 + a)L_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + z = a \\ (1 - a)y + (a - 1)z = a^2 - a \\ (a - 1)(a + 2)z = (1 + a)(1 - a^2) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, on a une unique solution qui est :

$$\begin{cases} z = \frac{(1 + a)^2}{2 + a} \\ y = -a + z = -a + \frac{(1 + a)^2}{a + 2} = \frac{1}{a + 2} \\ z = a - ay - z = -\frac{a + 1}{a + 2} \end{cases}$$

Si $a = 1$, le système est :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

soit juste $x + y + z = 1$. On a donc $x = 1 - y - z$ et l'ensemble des solutions est $\{(1 - y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}$

Si $a = -2$ le dernier système nous donne :

$$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ 3y - 3z = 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Il n'y a donc pas de solution.

Exercice 2.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $Q \times P$. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

On a $Q \times P = -9 I_3$ et $P \times Q = -9 I_3$ donc

$$P \times \left(\frac{-1}{9} Q \right) = I_3 \quad \text{et} \quad \left(\frac{-1}{9} Q \right) \times P = I_3.$$

Ainsi P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \frac{-1}{9} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

2. Calculer $D = P^{-1}AP$.

On calcule $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = D$.

3. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

D est diagonale, on a donc $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix}$

4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = P^{-1}A^nP$.

Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n) : \ll D^n = P^{-1}A^nP \gg$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— *Initialisation* :

Pour $n = 1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie : voir question ??.

— *Hérédité* :

Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $D^n = P^{-1}A^nP$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} D^{n+1} &= D^n \times D \\ &= P^{-1}A^nP \times D \text{ par HR} \\ &= P^{-1}A^nP \times P^{-1}AP \text{ par question ??} \\ &= P^{-1}A^n \underbrace{PP^{-1}}_{I_3} AP \\ &= P^{-1} \underbrace{A^n A}_{A^{n+1}} P \\ &= P^{-1}A^{n+1}P \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— *Conclusion* : Pour tout $n \geq 1$, on a $D^n = P^{-1}A^nP$.

5. En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On a montré à la question précédente que pour tout $n \geq 1, D^n = P^{-1}A^nP$, donc $A^n = P D^n P^{-1}$. De plus, on a vu en question ?? que $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.

Ainsi, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} 2 - 2 \times 10^n & 2 - 2 \times 10^n & -7 - 2 \times 10^n \\ -4 - 5 \times 10^n & -4 - 5 \times 10^n & 14 - 5 \times 10^n \\ 2 - 2 \times 10^n & 2 - 2 \times 10^n & -7 - 2 \times 10^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré du polynôme $P(X^2)$.
Soit P de degré $n \in \mathbb{N}$ alors il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$$

Alors

$$P(X^2) = P(X) = a_0 + a_1X^2 + \dots + a_n(X^2)^n = P(X) = a_0 + a_1X^2 + \dots + a_nX^{2n}$$

Ainsi $\deg(P(X^2)) = 2n = 2\deg(P)$

2. On introduit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}[X] / \text{pour tout } X \in \mathbb{R}, P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)(*)\}$.

- (a) Montrer que le polynôme nul ainsi que le polynôme $X^3 - 1$ sont deux éléments de E .

Soit $P = 0$ le polynôme nul. Alors $P(X^2) = 0$ et $(X^3 + 1)P(X) = (X^3 + 1) \times 0 = 0$. Donc on a bien $P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)$. Le polynôme nul est bien dans l'ensemble E .

Soit maintenant le polynôme $P = X^3 - 1$, alors $P(X^2) = (X^2)^3 - 1 = X^6 - 1$ et $(X^3 + 1)P(X) = (X^3 + 1)(X^3 - 1) = (X^3)^2 - 1 = X^6 - 1$. Donc on a bien $P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)$. Le polynôme $X^3 - 1$ est bien dans l'ensemble E .

- (b) Analyse du problème : soit $P \in E$ non nul. Montrer qu'alors P est de degré 3.

Soit P un élément non nul de E , alors $P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)$. Donc

$$\deg(P(X^2)) = \deg((X^3 + 1)P(X))$$

Et donc

$$2\deg(P) = 3 + \deg(P)$$

Et donc

$$\deg(P) = 3$$

- (c) Montrer que $P(1) = 0$.

On évalue la relation (*) en $X = 1$ cela donne :

$$P(1^2) = (1^3 + 1)P(1)$$

Soit $P(1) = 2P(1)$ et donc $P(1) = 0$.

- (d) Dériver la relation (*), puis en déduire $P'(0) = 0$. Attention à la dérivée de la composée $P(X^2)$.

On dérive la relation (*) cela donne :

$$2XP'(X^2) = 3X^2P(X) + (X^3 + 1)P'(X)(**)$$

Ainsi en évaluant (**) en $X = 0$ cela donne :

$$2 \times 0 \times P'(0) = 3 \times 0P(0) + (0 + 1)P'(0)$$

Et donc $0 = P'(0)$

- (e) Montrer que $P''(0) = 0$.

On dérive (**) on obtient :

$$2P'(X^2) + 4X^2P''(X^2) = 6XP(X) + 3X^2P'(X) + 3X^2P'(X) + (X^3 + 1)P''(X)(***)$$

On évalue (***) en $X = 0$. On obtient :

$$2P'(0) + 0 = 0P(0) + 0P'(0) + 0P'(0) + P''(0)$$

Et donc comme $P'(0) = 0$ on a bien $0 = P''(0)$.

- (f) En effectuant la division euclidienne de P par $X^3 - 1$, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(X) = a(X^3 - 1)$.

Par division euclidienne de P par $X^3 - 1$ il existe Q et R tels que $P = (X^3 - 1)Q + R$ avec $\deg R < \deg X^3 - 1 = 3$ donc R est de degré 2 donc il existe a_0, a_1 et $a_2 \in \mathbb{R}$ tels que $R(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$. De plus P étant de degré 3, Q est nécessairement de degré 0, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $Q(X) = a$. Donc $P(X) = a(X^3 - 1) + a_0 + a_1X + a_2X^2$ (*). Ainsi en évaluant (*) en $X = 1$ on a :

$$0 = P(1) = (1^3 - 1)a + a_0 + a_1 + a_2$$

Donc $a_0 + a_1 + a_2 = 0$

En dérivant (*), on obtient : $P'(X) = a3X^2 + a_1 + 2a_2X$. Ainsi en évaluant cette expression en $X = 0$, on obtient :

$$0 = a_1$$

En redérivant l'expression obtenue au-dessus, on obtient : $P''(X) = 6aX + 2a_2$ et donc en évaluant en 0, on a :

$$0 = 2a_2$$

Finalement on résoud le système :
$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ 2a_2 = 0 \end{cases}$$
. On obtient $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Et

donc $R = 0$. Ainsi $P(X) = a(X^3 - 1)$, $a \in \mathbb{R}$.

- (g) Faire la synthèse du problème : en déduire l'ensemble E .

Par ce qui précède si un polynôme est dans E alors il est forcément de la forme $a(X^3 - 1)$, $a \in \mathbb{R}$. Vérifions donc que ces polynôme sont bien des éléments de E . Soit $P = a(X^3 - 1)$ $a \in \mathbb{R}$, alors, d'une part :

$$P(X^2) = a((X^2)^3 - 1) = a(X^6 - 1)$$

D'autre part :

$$(X^3 + 1)P = (X^3 + 1)a(X^3 - 1) = a((X^3)^2 - 1) = a(X^6 - 1)$$

On a donc bien $P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)$. Le polynôme P est bien dans E . Finalement :

$$E = \{P = a(X^3 - 1), a \in \mathbb{R}\}$$