

Chapitre 4

Polynômes

1 Polynômes de degré n

1.1 Définitions

Définition 1.1.1. On dit que P est un polynôme (ou une fonction polynomiale) à coefficients réels si il s'écrit sous la forme suivante :

$$P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \text{ avec } n \in \mathbb{N}, \text{ et } (a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \text{ des réels.}$$

Les nombres (a_k) sont appelés les coefficients du polynôme. P est ainsi définie sur $\mathbb{R}$.

Notation 1.1.2. On note $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Exemple 1.1.1. 1. Donner un exemple de polynôme de $\mathbb{R}[x]$.

Remarque 1.1.1. Avant la réforme, les polynômes étaient définis avec X et non x (ce X pouvait alors cacher tout réel x mais également une matrice ou une application ou...). Il y a équivalence entre les rédaction suivantes :

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = 2X^2 - X + 1$. (ancien programme)
2. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ le polynôme $P : x \mapsto 2x^2 - x + 1$ ou par abus de langage $P = 2x^2 - x + 1$

Pour simplifier le passage d'une écriture à l'autre, on peut définir les polynômes suivants :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, X^k : x \mapsto x^k$$

Définition 1.1.3. Soit $P = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$.

Le **coefficient dominant** de P est a_n et alors le **degré de P** est n , ce qui se note $\deg P = n$. De plus si $a_n = 1$, P est dit **unitaire**.

Remarque 1.1.2. Le polynôme nul est, par convention, de degré $-\infty$: $\deg 0 = -\infty$.

Exemple 1.1.2. Déterminer le degré du polynôme $P = 2x^4 + 3x^2(x^3 + 1)$.

Exemple 1.1.3. Donner un exemple de polynôme unitaire de degré 7.

Définition 1.1.4. Deux polynômes P et Q sont dits égaux, et on note $P = Q$, si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = Q(x)$.

Proposition 1.1.1 (Propriété fondamentale : unicité de l'écriture d'un polynôme).

Deux polynômes $P : x \mapsto a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ (où $a_n \neq 0$) et $Q : x \mapsto b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ (avec $b_m \neq 0$) sont égaux **ssi** ils ont même degré ($n = m$) et mêmes coefficients ($\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket a_k = b_k$).

1.2 Opérations algébriques

Définition 1.2.1. Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut définir :

- le polynôme $P + Q$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, (P + Q)(x) = P(x) + Q(x)$
- le polynôme λP par : $\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda P)(x) = \lambda P(x)$
- le polynôme PQ par : $\forall x \in \mathbb{R}, (PQ)(x) = P(x) \times Q(x)$
- le polynôme $P \circ Q$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, (P \circ Q)(x) = P(Q(x))$

Exemple 1.2.1. Soient P et Q les polynômes définis par :

$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 + 3$ et $Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$, et soit $\lambda = 2$. Définir le polynôme $P + Q$, le polynôme λP et le polynôme PQ .

Exemple 1.2.2. Soient les polynômes $P : x \mapsto x^3 - 5x + 2$ et $Q : x \mapsto x^2$. Déterminer le polynôme $P \circ Q$. Souvent, dans ce cas, le polynôme Q ne sera pas introduit : on regardera directement le polynôme $x \mapsto P(x^2)$.

Proposition 1.2.1. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[x]$.

- i) $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.
- ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\deg(\lambda P) = \deg P$.
- iii) $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ et **si** $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$
- iv) Si Q n'est pas un polynôme constant alors $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$

Exemple 1.2.3. 1. Illustrer la propriété précédente en regardant ce qui se passe pour les polynômes $P = x^2 + 3$ et $Q = -x^2 + 2x + 3$.

2. La propriété est-elle vraie pour $P = x - 5$ et $Q = 5$? Et pour $P = x + 1$ et $Q = 0$?

Proposition 1.2.2. Si P et Q sont deux polynômes non-nuls, alors le polynôme produit PQ est un polynôme non-nul.

Par contraposée : si le produit de 2 polynômes est nul, nécessairement au moins l'un des polynômes est le polynôme nul. Autrement dit : $PQ = 0_{\mathbb{R}[x]} \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[x]}$ ou $Q = 0_{\mathbb{R}[x]}$.

2 Division euclidienne

Théorème 2.0.1. Soient A et $B \neq 0$ deux éléments de $\mathbb{R}[x]$.

Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[x]^2$ vérifiant $\deg R < \deg B$ et $A = BQ + R$.

Exemple 2.0.1. Effectuer la division euclidienne de $A = x^3 - 4x + 2$ par $B = x + 2$.

Définition 2.0.1. On dit que le polynôme Q divise le polynôme P s'il existe B tel que $P = BQ$, ou encore si $R = 0$ dans la division euclidienne.

Exemple 2.0.2. 1. Montrer que le polynôme $Qx \mapsto x + 1$ divise le polynôme $P : x \mapsto x^2 - 1$.

2. Le polynôme $Q : x \mapsto x^2 + 1$ est-il un diviseur du polynôme $P = x^3 - 2x + 1$?

Théorème 2.0.2. Le polynôme $(x - a)$ divise P si et seulement si $P(a) = 0$.

Exemple 2.0.3. 1. Le polynôme $x \mapsto x - 2$ est-il un diviseur de $P : x \mapsto x^2 - 2x + 1$?

2. Donner un diviseur de $P : x \mapsto 2x^2 - x - 1$.

3 Racines d'un polynôme

Définition 3.0.1. Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que a est une racine de P si et seulement si $P(a) = 0$.

Théorème 3.0.1. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré n , P possède au plus n racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3.0.1. Par contraposée, si un polynôme P de degré inférieur ou égal à n possède au moins $n + 1$ racines alors c'est le polynôme nul.

En particulier, un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul.

Exemple 3.0.1. Soient P et Q deux polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et tels que $P(0) = Q(0)$, $P(1) = Q(1)$ et $P(2) = Q(2)$. Montrer que $P = Q$.

Définition 3.0.2. Soit α une racine de P . On dit que son ordre de multiplicité est $p \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si :

$$(x - \alpha)^p \text{ divise } P \text{ et } (x - \alpha)^{p+1} \text{ ne divise pas } P$$

ou encore :

$$P = (x - \alpha)^p \times Q \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0$$

Théorème 3.0.2. Soit α une racine de P . α est racine d'ordre p si et seulement si on a :

$$\begin{cases} \forall k < p, P^{(k)}(\alpha) = 0 \\ P^{(p)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Méthode 3.1. Pour déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine α de P , on évalue P et ses dérivées successives en α . L'ordre de multiplicité de α est le premier k tel que $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Exemple 3.0.2. Déterminer l'ordre de multiplicité de -1 dans $x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 10x + 3$.

4 Factorisation d'un polynôme

4.1 Polynômes de degré 2

Proposition 4.1.1. Pour résoudre l'équation de degré 2 à coefficients réels

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

on calcule son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double $x_0 = \frac{-b}{2a}$. Alors le polynôme se factorise en $a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Alors le polynôme se factorise en $a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solutions réelles. Alors le polynôme ne se factorise pas.

4.2 Cas général

Proposition 4.2.1. Tout élément de $\mathbb{R}[x]$ se décompose en produit de facteurs de degré 1 et 2.

Méthode 4.1. Pour factoriser un polynôme P dans $\mathbb{R}[x]$, on peut :

1. Chercher ses racines évidentes : on teste $-2, -1, 0, 1, 2$.
2. Si l'une de ces valeurs α est racine de P , on effectue la division euclidienne de P par $x - \alpha$. Le quotient Q obtenu est tel que

$$P = (x - \alpha) \times Q.$$

3. On procède de même sur Q , jusqu'à obtenir un polynôme de degré 2, dont on détermine les racines de manière systématique.

Exemple 4.2.1. Factoriser $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 - x + 2$ dans $\mathbb{R}[x]$.

Proposition 4.2.2. Tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Méthode 4.2. Pour déterminer le reste dans la division euclidienne d'un polynôme A de degré n par un polynôme B de degré 2 :

1. On écrit la définition de la division euclidienne :

$$A = B \times Q + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(B).$$

2. On écrit ce que ça signifie pour R : comme B est de degré 2, alors $\deg(R) < 2$ et $R = ax + b$.
3. On détermine les racines de B : x_1 et x_2 .
4. On évalue l'équation $A = B \times Q + R$ en les racines de B . On obtient les valeurs de $R(x_1)$ et $R(x_2)$.
5. On détermine a et b en résolvant le système

$$\begin{cases} a x_1 + b = R(x_1) \\ a x_2 + b = R(x_2) \end{cases}$$

Exemple 4.2.2. Quel est le reste de la division euclidienne du polynôme $(x+1)^n - x^n + 1$ par $x^2 - 1$?