
Devoir maison 4 pour le 4/11/2025

Exercice 1.

Résoudre le système suivant en discutant suivant les valeurs de a :

$$\begin{cases} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{cases}$$

Exercice 2.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $Q \times P$. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = P^{-1}A^nP$.
5. En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.

1. Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré du polynôme $P(X^2)$.
2. On introduit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}[X] / \text{pour tout } X \in \mathbb{R}, P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)(*)\}$.
 - (a) Montrer que le polynôme nul ainsi que le polynôme $X^3 - 1$ sont deux éléments de E .
 - (b) Analyse du problème : soit $P \in E$ non nul. Montrer qu'alors P est de degré 3.
 - (c) Montrer que $P(1) = 0$.
 - (d) Dériver la relation $(*)$, puis en déduire $P'(0) = 0$. Attention à la dérivée de la composée $P(X^2)$.
 - (e) Montrer que $P''(0) = 0$.
 - (f) En effectuant la division euclidienne de P par $X^3 - 1$, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(X) = a(X^3 - 1)$.
 - (g) Faire la synthèse du problème : en déduire l'ensemble E .