

Devoir maison 5 pour le 28/11/2025

Exercice 1. (D'après EML 2017 ECE)

On considère la fonction $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]0; +\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - e \ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 > e < 2,8 \quad 7,3 < e^2 < 7,4 \quad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

1. (a) Montrer que f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$.

f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont et

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x}$$

- (b) Dresser le tableau de variations de f' . Préciser $f'(1)$.

f' est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} > 0$ pour tout $x > 0$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$. Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Et $f'(1) = e^1 - \frac{e}{1} = 0$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. Dresser le tableau de variations de f .

f' étant strictement croissante et $f'(1) = 0$ on a $f'(x) < 0$ pour $x < 1$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 1$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0} -e \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$. Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par le théorème des croissances comparées. Et $f(1) = e^1 - e \ln(1) = e^1 - 0 = e$. On a donc le tableau de variation suivant pour f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	e	$+\infty$

3. Etudier les variations de la fonction $u :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x) - x$

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = f'(x) - x$. Alors g est dérivable et

$$g'(x) = f''(x) - 1 = e^x + \frac{e}{x^2} - 1$$

Or comme $x > 0$, $e^x > 1$, donc $e^x - 1 + \frac{1}{x^2} > 0$. donc $g'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ par croissances comparées. Ainsi le tableau de variations de g est :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4. En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α , et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Comme g est continue et strictement croissante, par le théorème de la bijection, elle induit une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$. C'est-à-dire l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\alpha \in]0, +\infty[$. De plus $g(1) = f'(1) - 1 = e^1 - \frac{e}{1} - 1 = -1 < 0$ et $g(2) = e^2 - \frac{e}{2} - 2 \geq 7,3 - \frac{2,8}{2} - 2 > 0$. Ainsi par le théorème des valeurs intermédiaires il existe une solution $a \in]1, 2[$ à l'équation $g(x) = 0$, par unicité de la solution sur $]0, +\infty[$ on en déduit que $1 < \alpha < 2$.

Exercice 2.

Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien y-a-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables ?

On commence par choisir les personnes qui vont s'installer autour de la première table. Il y a $\binom{7}{3}$ possibilités. Ensuite, les 3 personnes qui sont autour de la première table peuvent choisir librement leur place. Il y a $3!$ choix (autant que de permutations des 3 chaises). De même, il y a $4!$ choix pour les personnes qui s'installent autour de la deuxième table. Le nombre total de possibilités est donc $\binom{7}{3} \times 3! \times 4! = 7!$.