

Devoir maison 5 pour le 10/12/2025

Exercice 1.

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12.

Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

À chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12. Il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.

Un joueur possédant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- il mise sur le chiffre 1 à la première partie
- s'il perd à la n^e partie, $n \geq 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la n^e partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

1. On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « le joueur gagne la n^e partie ».

(a) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}$$

Considérons l'événement A : « jouer 1, 3, et 5 » et G l'événement « gagner ». Il est clair que :

$$P_A(G) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

De même, si B est l'événement « jouer 1 et 2 », on a :

$$P_B(G) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{A_n}(A_{n+1}) = P_A(G) = \frac{1}{4} \text{ et } P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_B(G) = \frac{1}{6}$$

En remarquant que la famille $\{A_n, \overline{A_n}\}$ constitue un système complet d'événements, on obtient, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})P(\overline{A_n}) \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n) \\ &= \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Une suite arithmético-géométrique ; son point fixe est $\frac{2}{11}$ et la suite définie par $v_n = p_n - \frac{2}{11}$ est géométrique de raison $\frac{1}{12}$, ce qui permet d'écrire :

$$p_n = v_n + \frac{2}{11} = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{2}{11}\right) + \frac{2}{11}$$

et puisque $p_1 = \frac{1}{12}$, on trouve :

$$\forall n \geq 1, p_n = -\frac{13}{132} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + \frac{2}{11}$$

et donc,

$$\lim p_n = \frac{2}{11}$$

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note B_k l'événement : “le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{\text{ème}}$ partie”.

- (a) À l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $P(B_n)$.

La première partie gagnée est donc la $n^{\text{ème}}$ et avec les notations précédentes :

$$B_n = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n$$

et la formule des probabilités composées donne :

$$P(B_n) = P(\overline{A}_1) \times P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2) \times P_{\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2}(A_3) \times \cdots \times P_{\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1}}(A_n)$$

ou encore, puisque le gain d'un tirage ne dépend que du résultat précédent :

$$P(B_n) = P(\overline{A}_1) \times P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2) \times P_{\overline{A}_2}(\overline{A}_3) \times \cdots \times P_{\overline{A}_{n-1}}(A_n)$$

c'est-à-dire :

$$P(B_n) = \underbrace{\frac{11}{12} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6}}_{n-1 \text{ termes}} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{72} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

La formule précédente n'est pas valable pour $n = 1$, car dans ce cas on a $P(B_1) = \frac{1}{12}$.

- (b) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, calculer $P(B_k)$.

Dans cette question on a clairement, sauf pour le concepteur qui omet de l'écrire, $n \geq 2$.

On a, si $k \geq 2$, et donc $n \geq 3$:

$$B_k = \overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_{k-1} \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \cdots \cap \overline{A}_n$$

et par la formule des probabilités composées :

$$P(B_k) = \underbrace{\frac{11}{12} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}}_{k-1 \text{ termes}} \times \frac{1}{6} \times \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}}_{n-k \text{ termes}} = \frac{11}{96} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} = \frac{11}{80} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

Si $k = 1$, on a :

$$B_1 = A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n$$

et donc :

$$P(B_1) = \frac{1}{12} \times \underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6}}_{n-1 \text{ termes}} = \frac{1}{16} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

- (c) En déduire la probabilité q_n pour que le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties.

Il reste à constater que la probabilité cherchée est, dans le cas $n \geq 2$:

$$q_n = \sum_{k=1}^n P(B_k)$$

soit :

$$q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{16} + (n-2) \frac{11}{80} + \frac{11}{72} \right)$$

Exercice 2.

Tous les dimanches, Mathilde se rend à la piscine et nage sur plusieurs longueurs. Pour chaque longueur, elle peut nager la brasse, le crawl ou le dos. On observe que ses choix respectent les règles suivantes :

- si à la longueur précédente elle a nagé la brasse, elle continue en brasse dans 50% des cas, passe en crawl dans 30% des cas et nage sur le dos dans 20% des cas ;
- si à la longueur précédente elle a nagé le crawl, elle continue en crawl dans 50% des cas, passe en brasse dans 30% des cas et nage sur le dos dans 20% des cas ;
- si à la longueur précédente elle a nagé le dos, elle continue en dos dans 80% des cas, et passe en brasse ou en crawl de manière équiprobable.

On introduit les évènements et probabilités suivants :

- B_n : “Mathilde nage la brasse à la $n^{\text{ième}}$ longueur”, de probabilité b_n
- C_n : “Mathilde nage le crawl à la $n^{\text{ième}}$ longueur”, de probabilité c_n
- D_n : “Mathilde nage le dos à la $n^{\text{ième}}$ longueur”, de probabilité d_n .

On note $Z_n = \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$ et on sait que Mathilde commence toujours par une longueur de brasse.

1. Donner les valeurs de b_1 , c_1 et d_1 . En déduire le vecteur Z_1 .

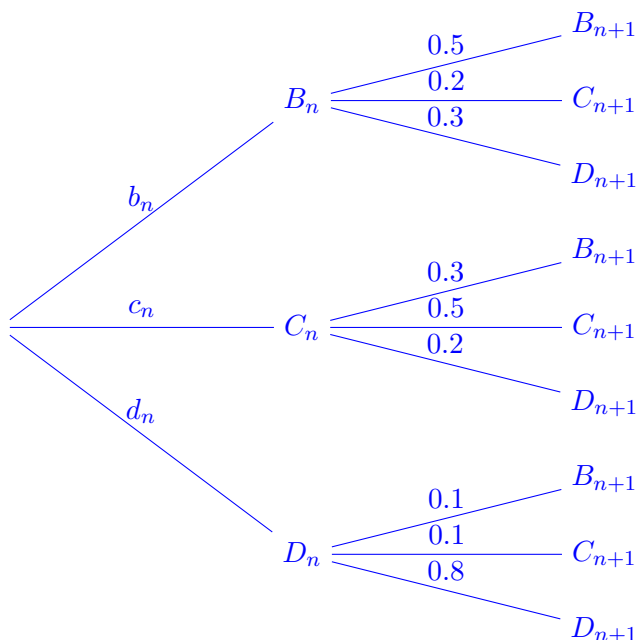
Puisque Mathilde commence par une longueur de brasse, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$ et $d_1 = 0$. Ainsi,

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que (B_n, C_n, D_n) forme un système complet d'évènements.

On considère l'univers Ω : “Toutes les combinaisons de nages possibles”. Alors (B_n, C_n, D_n) est une famille d'évènements deux à deux disjoints avec $B_n \cup C_n \cup D_n = \Omega$ car à la longueur n , Mathilde nage l'une de ces trois nages. Cette famille d'évènements forme donc une partition de l'univers.

3. Représenter les informations de l'énoncé sur le passage de la $n^{\text{ième}}$ longueur à la $n + 1^{\text{ième}}$ longueur dans un arbre de probabilités.



4. Exprimer b_{n+1} , c_{n+1} et d_{n+1} en fonction de b_n , c_n et d_n .

Puisque (B_n, C_n, D_n) forme une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) + P(D_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(B_{n+1}) \\ &= b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{3}{10} + d_n \times \frac{1}{10} \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2} b_n + \frac{3}{10} c_n + \frac{1}{10} d_n \end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{1}{2} c_n + \frac{3}{10} b_n + \frac{1}{10} d_n \\ d_{n+1} &= \frac{4}{5} d_n + \frac{1}{5} b_n + \frac{1}{5} c_n \end{aligned}$$

5. Écrire cette relation de récurrence sous la forme matricielle $Z_{n+1} = A \times Z_n$, où A est une matrice à déterminer.

On pose $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ et on a alors $Z_{n+1} = A \times Z_n$.

6. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, calculer P^{-1} .

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, on applique la méthode du pivot de Gauss pour l'inverser, on obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

7. Déterminer $D = P^{-1} \times A \times P$.

On calcule $D = P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

8. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = PD^{n-1}P^{-1}Z_1$.

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $P(n)$: " $Z_n = PD^{n-1}P^{-1}Z_1$ " est vraie.

- *Initialisation* :

On pose $n = 1$.

On a $P \underbrace{D^{1-1}}_{D^0=I_n} P^{-1} Z_1 = P I_n P^{-1} Z_1 = \underbrace{P P^{-1}}_{I_n} Z_1 = Z_1$ donc $P(1)$ est vraie.

- *Hérédité* : Soit $n \geq 1$ tel que $P(n)$ soit vraie. Montrons que $P(n+1)$ l'est aussi.

Par la question 5, on a

$$Z_{n+1} = A \times Z_n.$$

Par la question 7, on a

$$\begin{aligned}
 D &= P^{-1} \times A \times P \Leftrightarrow P \times D = \underbrace{P \times P^{-1}}_{I_n} \times A \times P \\
 &\Leftrightarrow P \times D \times P^{-1} = A \times P \times P^{-1} \\
 &\Leftrightarrow PDP^{-1} = A.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 Z_{n+1} &= A \times Z_n \\
 &= PDP^{-1} \times Z_n \\
 &= PDP^{-1} \times PD^{n-1}P^{-1}Z_1 \text{ par hypothèse de récurrence} \\
 &= PD^{n-1}DP^{-1}Z_1 \\
 &= PD^n P^{-1}Z_1 \\
 &= PD^{(n+1)-1}P^{-1}Z_1
 \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

• *Conclusion :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n = PD^{n-1}P^{-1}Z_1.$$

9. En déduire les expressions de b_n , c_n et d_n en fonction de n , puis la convergence des suites.

Par la question 8, on sait que

$$\begin{aligned}
 Z_n &= PD^{n-1}P^{-1}Z_1 \\
 &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5^{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \end{pmatrix} P^{-1}Z_1 \\
 Z_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

En revenant à la définition de Z_n , on obtient donc les expressions suivantes pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \\
 c_n &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \\
 d_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}
 \end{aligned}$$

Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$ et $-1 < \frac{3}{5} < 1$, les limites de ces suites sont les suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{1}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \frac{1}{2}.$$

10. Calculer la probabilité que Mathilde ne nage que la brasse pendant les n premières longueurs. On cherche la probabilité de l'évènement $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$. On applique la formule des probabilités composées :

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \dots \times P_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n)$$

Chaque B_{i+1} ne dépend que de B_i , et $P_{B_i}(B_{i+1}) = \frac{1}{2}$, donc on peut réécrire la formule :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap \dots \cap B_n) &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_2}(B_3) \times \dots \times P_{B_{n-1}}(B_n) \\ &= 1 \times \underbrace{\frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2}}_{n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

La probabilité que Mathilde ne nage que la brasse au cours des n premières longueurs vaut $\frac{1}{2^{n-1}}$.