

---

Devoir maison 5 pour le 10/12/2025

---

**Exercice 1.**

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12.

Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

À chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12. Il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.

Un joueur possédant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- il mise sur le chiffre 1 à la première partie
- s'il perd à la  $n^{\text{e}}$  partie,  $n \geq 1$ , il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la  $n^{\text{e}}$  partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

1. On note  $p_n$  la probabilité de l'événement  $A_n$  : « le joueur gagne la  $n^{\text{e}}$  partie ».

(a) Calculer les probabilités conditionnelles  $P_{A_n}(A_{n+1})$  et  $P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$ . En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{12} p_n + \frac{1}{6}$$

(b) En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .

2. Soit  $k \in [1, n]$ , on note  $B_k$  l'événement : « le joueur gagne une seule fois au cours des  $n$  premières parties et ce gain a lieu à la  $k^{\text{ième}}$  partie ».

(a) À l'aide de la formule des probabilités composées, calculer  $P(B_n)$ .

(b) Soit  $k \in [1, n-1]$ , calculer  $P(B_k)$ .

(c) En déduire la probabilité  $q_n$  pour que le joueur gagne une seule fois au cours des  $n$  premières parties.

## Exercice 2.

Tous les dimanches, Mathilde se rend à la piscine et nage sur plusieurs longueurs. Pour chaque longueur, elle peut nager la brasse, le crawl ou le dos. On observe que ses choix respectent les règles suivantes :

- si à la longueur précédente elle a nagé la brasse, elle continue en brasse dans 50% des cas, passe en crawl dans 30% des cas et nage sur le dos dans 20% des cas ;
- si à la longueur précédente elle a nagé le crawl, elle continue en crawl dans 50% des cas, passe en brasse dans 30% des cas et nage sur le dos dans 20% des cas ;
- si à la longueur précédente elle a nagé le dos, elle continue en dos dans 80% des cas, et passe en brasse ou en crawl de manière équiprobable.

On introduit les évènements et probabilités suivants :

- $B_n$  : “Mathilde nage la brasse à la  $n^{\text{ième}}$  longueur”, de probabilité  $b_n$
- $C_n$  : “Mathilde nage le crawl à la  $n^{\text{ième}}$  longueur”, de probabilité  $c_n$
- $D_n$  : “Mathilde nage le dos à la  $n^{\text{ième}}$  longueur”, de probabilité  $d_n$ .

On note  $Z_n = \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$  et on sait que Mathilde commence toujours par une longueur de brasse.

1. Donner les valeurs de  $b_1$ ,  $c_1$  et  $d_1$ . En déduire le vecteur  $Z_1$ .
2. Montrer que  $(B_n, C_n, D_n)$  forme un système complet d'évènements.
3. Représenter les informations de l'énoncé sur le passage de la  $n^{\text{ième}}$  longueur à la  $n + 1^{\text{ième}}$  longueur dans un arbre de probabilités.
4. Exprimer  $b_{n+1}$ ,  $c_{n+1}$  et  $d_{n+1}$  en fonction de  $b_n$ ,  $c_n$  et  $d_n$ .
5. Écrire cette relation de récurrence sous la forme matricielle  $Z_{n+1} = A \times Z_n$ , où  $A$  est une matrice à déterminer.
6. Soit  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ , calculer  $P^{-1}$ .
7. Déterminer  $D = P^{-1} \times A \times P$ .
8. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Z_n = PD^{n-1}P^{-1}Z_1$ .
9. En déduire les expressions de  $b_n$ ,  $c_n$  et  $d_n$  en fonction de  $n$ , puis la convergence des suites.
10. Calculer la probabilité que Mathilde ne nage que la brasse pendant les  $n$  premières longueurs.