

Devoir maison 7 pour le 29/01/2026

On considère f l'application définie par :

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ |x \ln(x)| & \text{sinon} \end{cases}$$

Partie A :

1. (a) Étudier la continuité de f .
- (b) Étudier la dérivabilité de f .

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ en tant que produit de telles fonctions. Les seuls problèmes sont :

- en 0 :

- on a $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ et la fonction f est continue en 0.
- on a de même :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln x| = +\infty$$

donc f n'est pas dérivable en 0, mais sa courbe représentative y possède une demi-tangente verticale.

- en 1 :

- la fonction est continue en 1, sans problèmes.
- pour la dérivabilité :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x \ln x}{x-1} = -1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{x-1} = 1$$

donc f n'est pas dérivable en 1 mais y possède deux demi-tangentes de pentes respectives -1 et $+1$.

2. Étudier les variations de f .

On a facilement :

$$\forall x > 0, x \neq 1, \quad f'(x) = \begin{cases} 1 + \ln x & \text{si } x > 1 \\ -1 - \ln x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

et on en déduit le tableau de variations

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

et on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x} = +\infty$$

donc la courbe présente une branche parabolique de direction (Oy) .

3. Démontrer qu'il existe un unique $a \in]1, e]$ tel que $f(a) = 1/e$ et un unique $b \in]1, e[$ tel que $f(b) = 1$.

La fonction f est strictement monotone et continue sur $[1, e]$, donc elle réalise une bijection de cet intervalle dans son image qui est $[f(1), f(e)] = [0, e]$.

les nombres $\frac{1}{e}$ et 1 appartiennent à ce dernier intervalle, donc admettent des antécédents uniques par f dans $[1, e]$.

4. Déterminer le signe de la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = f(x) - x.$$

Pour $0 < x < 1$ on a :

$$f(x) - x > 0 \iff -x \ln x - x > 0 \iff -x(1 + \ln x) > 0 \iff x < e^{-1}$$

et pour $x > 1$:

$$f(x) - x > 0 \iff x \ln x - x > 0 \iff x(\ln x - 1) > 0 \iff x > e$$

On en déduit le tableau de signes :

x	0	e^{-1}	e			
$f(x) - x$	0	+	0	-	0	+

Partie B :

Soit $u_0 > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle stationnaire ?

La suite est stationnaire pour $u_0 = 0$, $u_0 = e^{-1}$ et $u_0 = e$ d'après l'étude du signe de $f(x) - x$.

2. Soit $u_0 \in]0, 1/e[$.

(a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1/e$ et que (u_n) est croissante.

Récurrence :

— pour $n = 0$ le résultat est vrai par hypothèse.

— supposons que $0 < u_n < e^{-1}$; la fonction f étant strictement croissante sur l'intervalle $[0, e^{-1}]$, on a :

$$f(0) < f(u_n) < f(e^{-1}) \iff 0 < u_{n+1} < e^{-1}$$

ce qui montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < e^{-1}$$

On sait de plus que si $0 \leq x \leq e^{-1}$, alors $f(x) - x \geq 0$, donc on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) - u_n \geq 0 \iff u_{n+1} - u_n \geq 0$$

La suite est croissante.

(b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

La suite est croissante et majorée par e^{-1} , donc elle converge vers $\ell \leq e^{-1}$, et puisque f est continue on a $\ell = f(\ell)$; on en déduit :

$$\ell = 0, \ell = e^{-1}, \ell = e \text{ et } 0 < u_0 \leq \ell \leq e^{-1}$$

la seule possibilité est

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1}$$

3. Soit $u_0 \in]1/e, 1[$.

(a) Montrer que $u_1 \in]0, 1/e[$.

(b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

D'après le tableau de variations de f on a :

$$e^{-1} < x < 1 \Rightarrow 0 < f(x) < e^{-1}$$

On en déduit que si $e^{-1} < u_0 < 1$, alors $0 < u_1 < e^{-1}$.

les résultats de la question précédente montrent alors que la suite est croissante à partir du rang 1, majorée par e^{-1} et que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1}$$

4. Soit $u_0 > e$.

(a) Montrer que (u_n) est croissante.

Une récurrence élémentaire montre que $u_n > e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

— c'est vrai pour $n = 0$ par hypothèse.

— si $u_n > e$, puisque f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, on a :

$$e = f(e) < f(u_n) = u_{n+1}$$

On utilise alors l'étude du signe de $f(x) - x$ pour obtenir :

$$u_n > e \Rightarrow u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$$

et la suite est bien croissante.

Si la suite (u_n) est bornée, elle converge et sa limite vérifie $e < u_0 \leq \ell$ or les seules limites finies possibles sont 0, e^{-1} et e donc c'est impossible ; la suite étant croissante on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

(b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

Pour $x > e$, on a :

$$f'(x) = 1 + \ln x \geq 1 + 1 = 2$$

On applique alors l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[e, +\infty[$ avec $u_n > e$ et $u_{n-1} > e$:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}) \geq 2(u_n - u_{n-1})$$

On en déduit par une récurrence immédiate que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k \geq 2^k(u_1 - u_0)$$

En sommant ces inégalités pour k variant de 0 à n on obtient :

$$u_{n+1} - u_0 = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) \geq \sum_{k=0}^n 2^k(u_1 - u_0) = (2^{n+1} - 1)(u_1 - u_0)$$

ce qui est l'inégalité demandée.

Il reste à constater que $u_1 = f(u_0) > u_0$ car $u_0 > e$ et que $\lim 2^n = +\infty$ pour obtenir, par comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1}(u_1 - u_0) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

5. Soit $u_0 \in]1, e[$.

(a) On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = b$. Étudier la convergence de (u_n) .

Si $u_N = b$, on a $u_{N+1} = f(b) = 1$ et donc $u_{N+2} = 0$ et la suite est stationnaire à partir du rang $N + 2$.

(b) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq b$. Montrer qu'il existe N tel que $u_N < b$. Étudier la convergence de (u_n) .

Supposons que $u_n > b$ pour tout entier n ; une récurrence montre que $b < u_n < e$ pour tout n :

— c'est vrai pour $n = 0$ par hypothèse.

— si $b < u_n < e$, alors par croissance de f sur $[1, +\infty[$ et par hypothèse, on a :

$$b < u_{n+1} = f(u_n) < f(e) = e$$

Puisque $b > e^{-1}$, l'étude du signe de $f(x) - x$ donne alors :

$$u_n \in]e^{-1}, e[\Rightarrow u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$$

On en tire que la suite est décroissante et minorée, donc elle converge, et sa limite ℓ vérifie :

$$e^{-1} < b \leq \ell \leq u_0 < e \quad \text{et} \quad \ell = 0 \text{ ou } \ell = e^{-1} \text{ ou } \ell = 1$$

ce qui est impossible, donc l'hypothèse $u_n > b$ pour tout entier n est fausse, et donc :

il existe un entier N tel que $u_N \leq b$.

On en déduit alors que $0 \leq u_{N+1} \leq 1$, or tous les cas $0 \leq u_0 \leq 1$ ont été étudiés, plus précisément :

- si $u_{N+1} = 0$ la suite est stationnaire à partir du rang $N + 1$.
- si $u_{N+1} = e^{-1}$ la suite est stationnaire à partir du rang $N + 1$.
- si $0 < u_{N+1} < e^{-1}$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1}$ par la question (2.2).
- si $e^{-1} < u_{N+1} < 1$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-1}$ par la question (2.3).

Exercice 1.

Soit $n \geq 1$, on considère l'équation $\ln(x) - \frac{1}{x^n} = 0$. On admet qu'il existe une unique solution à cette équation et qu'elle est comprise entre 1 et 2.

1. Compléter le programme suivant pour qu'il prenne en entrée **n** et **eps** et qu'il renvoie une solution de l'équation avec une précision **eps**

```
1 def approx(n,eps):
2     a=.....
3     b=.....
4     while .....:
5         m=.....
6         if .....:
7             a=.....
8         else :
9             b=.....
10    return .....
```