
Devoir maison 7 pour le 29/01/2026

On considère f l'application définie par :

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ |x \ln(x)| & \text{sinon} \end{cases}$$

Partie A :

1. (a) Étudier la continuité de f .
(b) Étudier la dérivabilité de f .
2. Étudier les variations de f .
3. Démontrer qu'il existe un unique $a \in]1, e]$ tel que $f(a) = 1/e$ et un unique $b \in]1, e[$ tel que $f(b) = 1$.
4. Déterminer le signe de la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = f(x) - x.$$

Partie B :

Soit $u_0 > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle stationnaire ?
2. Soit $u_0 \in]0, 1/e[$.
 - (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1/e$ et que (u_n) est croissante.
 - (b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
3. Soit $u_0 \in]1/e, 1[$.
 - (a) Montrer que $u_1 \in]0, 1/e[$.
 - (b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
4. Soit $u_0 > e$.
 - (a) Montrer que (u_n) est croissante.
 - (b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.
5. Soit $u_0 \in]1, e[$.
 - (a) On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = b$. Étudier la convergence de (u_n) .
 - (b) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq b$. Montrer qu'il existe N tel que $u_N < b$. Étudier la convergence de (u_n) .

Exercice 1.

Soit $n \geq 1$, on considère l'équation $\ln(x) - \frac{1}{x^n} = 0$. On admet qu'il existe une unique solution à cette équation et qu'elle est comprise entre 1 et 2.

1. Compléter le programme suivant pour qu'il prenne en entrée **n** et **eps** et qu'il renvoie une solution de l'équation avec une précision **eps**

```
1 def approx(n,eps):
2     a=.....
3     b=.....
4     while .....:
5         m=.....
6         if .....:
7             a=.....
8         else :
9             b=.....
10    return .....
```