

Devoir maison 8 pour le 5/02/2026

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } AM = MA\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

— $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car les éléments de F sont des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

— L'élément neutre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la matrice nulle $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $A \times 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
donc $A \times 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \times A$ et $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \in F$.

— D'autre part, si M et N sont des éléments de F et si λ et μ sont des réels, on a :

$$A(\lambda M + \mu N) = \lambda \underbrace{AM}_{MA \text{ car } M \in F} + \mu \underbrace{AN}_{NA \text{ car } N \in F} = \lambda MA + \mu NA = (\lambda M + \mu N)A$$

et donc $\lambda M + \mu N \in F$, autrement dit F est stable par combinaison linéaire.

F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que A et I_2 sont éléments de F .

— On a $A \times A = A^2$ et $A \times A = A^2$, donc $A \in F$.

— On a $I_2 \times A = A$ et $A \times I_2 = A$ donc $A \in F$.

3. La fonction Python `TestF` prend en entrée une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donne en sortie `Vrai` si $M \in F$ et `Faux` sinon. Recopier et compléter son script.

```
def TestF(M):
    A=np.array([[4,1],[4,4]])
    if np.dot(A,M)==np.dot(M,A) :
        y=True
    else :
        y=False
    return y
```

4. Montrer que $F = \text{Vect}(A, I_2)$.

Il suffit maintenant, par la question 2, de montrer que tout élément de F est combinaison linéaire de A et I_2 .

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in F$. En écrivant que $AM = MA$ on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} 4x + z = 4x + 4y \\ 4x + 4z = 4z + 4t \\ 4y + t = x + 4y \\ 4y + 4t = z + 4t \end{cases} \iff \begin{cases} z = 4y \\ x = t \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} x & y \\ 4y & x \end{pmatrix}$$

On en déduit que $M = yA + (x - 4y)I_2$, donc $M \in \text{Vect}(A, I_2)$.

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) (\cos(t))^3 dt \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 (\cos(t))^3 dt \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^2 dt$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{4t-2}{t^2-t+1} dt \quad I_5 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt \quad I_6 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2} dt$$

Pour I_6 , déterminer a et b tels que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$.

1. On trouve :

$$I_1 = \left[-\frac{1}{4} \cos^4 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^2(t) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) (1 - \sin^2(t)) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin^2(t) - \cos(t) \sin^4(t) dt \\ &= \left[\frac{\sin^3(t)}{3} - \frac{\sin^5(t)}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - 0 = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

- 3.

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 t - 1) dt = [\tan t - t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

- 4.

$$I_4 = [2 \ln |t^2 - t + 1|]_0^1 = 0$$

5. Petite astuce :

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} dt = [t - \arctan t]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

6. Pour répondre à l'indication :

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right)$$

ce qui donne :

$$I_6 = \frac{1}{2} [\ln |1+t| - \ln |1-t|]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3$$

Exercice 3.

Dans cet exercice, on pose $E = \mathbb{R}^4$. Les deux questions sont indépendantes.

1. On pose :

$$u_1 = (1, 0, -1, 0) \quad u_2 = (1, 1, -1, -1) \quad u_3 = (1, 0, 1, 0) \quad u_4 = (1, -1, 1, -1)$$

(a) Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base de E .

On montre d'abord que la famille est libre. Soient des réels $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 4}$ tels que $\sum_i \lambda_i u_i = O_E$; on en déduit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

que l'on résout facilement, et on trouve $\lambda_i = 0$ pour tout i .

On montre ensuite que la famille est génératrice, c'est à dire que tout élément $u = (a, b, c, d) \in E$ est une combinaison linéaire des vecteurs u_i , soit

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$$

on en tire le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = a \\ \lambda_2 - \lambda_4 = b \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = c \\ -\lambda_2 - \lambda_4 = d \end{cases}$$

qui se résout comme le précédent, et donne un unique système de solutions :

$$\lambda_1 = \frac{a - b - c + d}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{b - d}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{a + b + c + d}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{-b - d}{2}$$

(b) Quelles sont les coordonnées de $u = (1, 1, 1, 1)$ dans cette base ?

On est ramené au problème précédent dans le cas où $u = (1, 1, 1, 1)$ et on trouve :

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = -1$$

2. On considère la partie F de E définie par :

$$F = \{(a, b, c, d) \in E \mid a + b + c + d = 0\}$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

On remarque que $u = (a, b, c, d) \in F$ si et seulement si $u = (a, b, c, -a - b - c)$. Donc $F = \text{Vect}((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer une base de F .

La famille $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$ est génératrice de F . Montrons qu'elle est libre.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\lambda_1(1, 0, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, 0, -1) + \lambda_3(0, 0, 1, -1) = (0, 0, 0, 0)$$

Alors

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La famille est donc libre. C'est donc une base de F .

Exercice 4.

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$.

On considère les polynômes

$$P_1 = X + 1, \quad P_2 = X - 1, \quad P_3 = X^2 + 1.$$

On pose $F = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

1. (a) Montrer que la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ forme une base de E .

— Montrons que la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_E.$$

Montrons que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_E &\iff \lambda_1(X + 1) + \lambda_2(X - 1) + \lambda_3(X^2 + 1) = 0_E \\ &\iff \lambda_3 X^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)X + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) = 0_E \\ &\iff \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est donc libre.

- Montrons que la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est génératrice de E . Soit $P \in E$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P = aX^2 + bX + c$. On cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = P.$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = P &\iff \lambda_1(X + 1) + \lambda_2(X - 1) + \lambda_3(X^2 + 1) = P \\ &\iff \lambda_3 X^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)X + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) = aX^2 + bX + c \\ &\iff \begin{cases} \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 = b \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 = b \\ \lambda_1 - \lambda_2 = c - a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_3 = a \\ \lambda_2 = \frac{b - c + a}{2} \\ \lambda_1 = \frac{b + c - a}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on a écrit P comme combinaison linéaire des polynômes de la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$, elle est donc génératrice de E .

La famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est génératrice de E et libre, elle forme donc une base de E .

(b) Écrire les coordonnées du polynôme $X^2 + X + 1$ dans cette base.

Il suffit de remplacer dans le calcul précédent $a = 1, b = 1$ et $c = 1$. On obtient alors $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = 1$, et donc les coordonnées de P dans la base $\{P_1, P_2, P_3\}$ sont $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. On a donc

$$P = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + P_3.$$

2. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

Soit $P \in F$, soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$.

$$\begin{aligned} P \in F &\iff P(1) = 0 \\ &\iff a + b + c = 0 \\ &\iff a = -b - c \\ &\iff P = (-b - c)X^2 + bX + c \\ &\iff P = b(\underbrace{-X^2 + X}_{P_4}) + c(\underbrace{-X^2 + 1}_{P_5}) \end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect}(P_4, P_5)$. F est donc un espace vectoriel.

(b) Déterminer une base de F .

La famille $\{P_4, P_5\}$ est génératrice de F . De plus les polynômes P_4 et P_5 ne sont pas colinéaires, donc ils forment une famille libre. C'est donc une base de F .