

Devoir maison 8 pour le 5/02/2026

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } AM = MA\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que A et I_2 sont éléments de F .
3. La fonction Python `TestF` prend en entrée une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donne en sortie `Vrai` si $M \in F$ et `Faux` sinon. Recopier et compléter son script.

```
def TestF(M):
    A=.....
    if .....==..... :
        print('Vrai')
    else :
        .....
```

4. Montrer que $F = \text{Vect}(A, I_2)$.

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) (\cos(t))^3 dt \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 (\cos(t))^3 dt \quad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^2 dt$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{4t-2}{t^2-t+1} dt \quad I_5 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt \quad I_6 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2} dt$$

Pour I_6 , déterminer a et b tels que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$.

Exercice 3.

Dans cet exercice, on pose $E = \mathbb{R}^4$. Les deux questions sont indépendantes.

1. On pose :
 $u_1 = (1, 0, -1, 0) \quad u_2 = (1, 1, -1, -1) \quad u_3 = (1, 0, 1, 0) \quad u_4 = (1, -1, 1, -1)$
 - (a) Montrer que la famille $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est une base de E .
 - (b) Quelles sont les coordonnées de $u = (1, 1, 1, 1)$ dans cette base ?
2. On considère la partie F de E définie par :

$$F = \{(a, b, c, d) \in E \mid a + b + c + d = 0\}$$

- (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- (b) Déterminer une base de F .

Exercice 4.

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$.

On considère les polynômes

$$P_1 = X + 1, \quad P_2 = X - 1, \quad P_3 = X^2 + 1.$$

On pose $F = \{P \in E, P(1) = 0\}$.

1. (a) Montrer que la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ forme une base de E .
 (b) Écrire les coordonnées du polynôme $X^2 + X + 1$ dans cette base.
2. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
 (b) Déterminer une base de F .