

Devoir maison 9 pour le 12/02/2026

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Une urne contient une boule noire non numérotée et $n - 1$ boules blanches, dont $n - 2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

Pour chaque i de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on note B_i l'événement : « le i -ème tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X .

Au mieux $X = 1$, au pire $X = n$ et toutes les valeurs intermédiaires sont possibles, donc $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

2. (a) Pour tout i de $\llbracket 2, n - 1 \rrbracket$, justifier que $P_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$.

Si on sait $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{i-1}$, pour le i -ème tirage, il reste $n - (i - 1)$ boules dans l'urne, dont une boule noire.

Donc $P_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{\text{Nb de boules blanches}}{\text{Nb total de boules}} = \frac{n - (i - 1) - 1}{n - (i - 1)} = \frac{n - i}{n - i + 1}$.

- (b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.
($X = k$) est l'événement $B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k$.

En utilisant la formule des probas composées :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \\ &= P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \dots P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(N_k) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{1}{n} \text{ par télescopage.} \end{aligned}$$

On a donc montré que $\forall n \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$.

- (c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Il en résulte que : $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\llbracket 1, n \rrbracket} \quad E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.

- (a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$P([X = k] \cap [Y = 0]) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

Notons B'_i l'événement « le i -ème tirage donne une boule blanche numérotée 0 ». On a alors

$$(X = k) \cap (Y = 0) = B'_1 \cap B'_2 \cap \dots \cap B'_{k-1} \cap N_k.$$

Par le même principe, en utilisant la formule des probabilités composées généralisée :

$$\begin{aligned}
 P[(X = k) \cap (Y = 0)] &= P(B'_1 \cap B'_2 \cap \dots \cap B'_{k-1} \cap N_k) \\
 &= P(B'_1)P_{B'_1}(B'_2)P_{B'_1 \cap B'_2}(B'_3) \dots P_{B'_1 \cap \dots \cap B'_{k-1}}(N_k) \\
 &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \dots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\
 &= \frac{(n-k) \times 1}{n(n-1)} \\
 &= \frac{n-k}{n(n-1)}.
 \end{aligned}$$

(b) En déduire $P(Y = 0)$.

On utilise le système complet d'événements $(X = k)_{k \in [1, n]}$. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
 P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^n P(X = k \cap Y = 0) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{n(n-1)} \text{ par la question précédente} \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (n-k) \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^n n - \sum_{k=1}^n k \right) \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \left(n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n}{2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{P(Y = 0) = \frac{1}{2}}.$

(c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

Par définition, $Y(\Omega) = [0, 1]$. On a donc

$$P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right) \quad E(Y) = \frac{1}{2} \quad V(Y) = \frac{1}{4}}$