
TD 4 - Polynômes

Exercice 1.

Ecrire un polynôme de degré 3, de coefficient dominant -3 et de coefficient constant 1.

Exercice 2.

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré du polynôme Q dans les cas suivants :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = xP(x) - P'(x)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = P(x) - xP'(x)$.

Exercice 3.

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \frac{1}{2}xP'(x)$.

Exercice 4.

Effectuer la division euclidienne de $x^5 - 7x^4 - x^2 - 9x + 9$ par $x^2 - 5x + 4$.

Exercice 5.

Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $x^2 + 2$ divise $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 2$.

Exercice 6.

1. Déterminer le reste de la division de $A : x \mapsto x^n$ par $B : x \mapsto (x-1)(x-2)$.
2. Déterminer le reste de la division de $A : x \mapsto x^n$ par $B : x \mapsto (x-1)^2(x-2)$.

Exercice 7.

Soit $n \geq 1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ par $(x-1)^2$.

Exercice 8.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A(x) = (x-2)^{2n} + (x-1)^n$ par $B(x) = (x-1)(x-2)$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A(x) = (x-2)^{2n} + (x-1)^n$ par $B(x) = (x-1)^2$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A(x) = (x-2)^{2n} + (x-1)^n$ par $B(x) = (x-1)^2(x-2)$.

Exercice 9.

Soit P un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $x-1$ est 7 et par $x+5$ est 3. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $x^2 + 4x - 5$?

Exercice 10.

Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$ tel que le reste de sa division par $x-1$, $x+1$ ou $x+2$ soit toujours 1.

Exercice 11.

Trouver les polynômes A de degré minimal tels que $x^2 + 1$ divise A et $x^3 + 1$ divise $A - 1$.

Exercice 12.

Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $x^3 - 2x^2 + x + 3$. Calculer $x_1 + x_2 + x_3$.

Exercice 13.

Soit la suite de polynômes (P_n) dans $\mathbb{R}[x]$ définie par :

$$P_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!} + \dots + \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!}$$

1. Ecrire $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$ sous forme factorisée.
2. Emettre une hypothèse sur la factorisation de $P_n(x)$ puis la démontrer.

Exercice 14.

Factoriser les polynômes suivants :

1. $A(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
2. $B(x) = x^6 - 7x^3 - 8$
3. $C(x) = x^4 + x^2 + 1$

Exercice 15.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $P(0) = 0$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = P(\sin(x))$. Montrer que P est le polynôme nul.

Exercice 16.

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose $Q = \frac{1}{2}(x-a)(P' + P'(a)) - P + P(a)$.
Montrer que a est une racine d'ordre au moins 3 de Q .

Exercice 17.

Déterminer les entiers n tels que le polynôme $(x+1)^n - x^n - 1$ possède au moins une racine multiple.