
Devoir maison 9 pour le 12/02/2026

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Une urne contient une boule noire non numérotée et $n - 1$ boules blanches, dont $n - 2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.

Pour chaque i de $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on note B_i l'événement : « le i -ème tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X .
2. (a) Pour tout i de $\llbracket 2, n - 1 \rrbracket$, justifier que $P_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$.
(b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X = k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.
(c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.
(a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$P([X = k] \cap [Y = 0]) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

- (b) En déduire $P(Y = 0)$.
- (c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.